

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №2. 2.11.96.

1 А. Решите в натуральных числах уравнение: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{\text{НОД}(x,y)} + \frac{1}{\text{НОК}(x,y)} = 1$.

1 Ё, Р. Разность между шестизначным числом $\overline{abcdef}$ и числом $\overline{fdebca}$ делится нацело на 271. Докажите, что $b = d$, а $c = e$.

2 В, П, Ю. Двое играют в следующую игру: они по очереди ставят по одному значку (первый – крестики, второй – нолики) на первоначально пустое поле, состоящее из $2n + 3$; П, Ю) $2n$ ячеек, соединенных в кольцо (n – произвольное натуральное число). Если по окончании игры найдутся три одинаковых значка, расположенных подряд, выигрывает второй игрок, в противном случае – первый. Кто выигрывает при правильной игре и как ему играть?

3 В, П, Ю. В музее города Черноморска имеется коллекция из 96 ; П, Ю) 13 одинаковых золотых монет, лежащих в ряд. Однажды милицией был пойман известный воришка Паниковский, у которого обнаружили 19 ; П, Ю) 7 монет из этой коллекции. На следствии он показал, что двадцать лет назад заменил эти монеты, лежавшие подряд, на фальшивые, которые легче настоящих, но внешне от них неотличимы. Следователь немедленно отправился в музей, чтобы изъять фальшивые монеты. По дороге он вспомнил, что не спросил у Паниковского, где именно они лежат. Но, найдя в отделе краеведения чашечные весы, он понял, что сможет отыскать все фальшивые монеты сам. За какое наименьшее количество взвешиваний ему удастся это сделать?

4 В, П, Ю. На плоскости несколько точек отмечены красным цветом, а несколько – синим. Известно, что для каждой красной точки найдутся хотя бы три синих точки на расстоянии 1 метр от нее. Может ли красных точек быть больше, чем синих?

5 В, П, Ю. Условия задач “Турнира Городов” передаются из Москвы в Харьков следующим образом: председатель Центрального Оргкомитета Н.Н. Константинов дает правильные условия одному из 30 сотрудников, тот их диктует по телефону другому сотруднику (из тех же 30), тот, в свою очередь, третьему, который уже звонит в Харьков и диктует их председателю Харьковского Оргкомитета О.Ф. Крижановскому. Константинов знает, что сотрудникам свойственно ошибаться, поэтому описанную передачу условий задач он производит достаточно много раз. В день проведения турнира Крижановскому по факсу передали, что все 30 сотрудников по 19 раз ошибались при передаче полученной ими информации, зато по 96 раз передавали ее без искажений. Докажите, что после получения этого сообщения Крижановский сможет узнать, какие именно из присланных условий задач являются правильными.

6 В. В трапеции $ABCD$ (с основаниями BC и AD) $AB + BD = AC + CD$. Докажите, что эта трапеция – равнобокая.

6 П. На сторонах AB , BC и CA некоторого остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1 , A_1 и B_1 соответственно так, что $AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = k : 1$. Как известно, при $k = 1$ перпендикуляры, восстановленные из точек C_1 , A_1 и B_1 к сторонам треугольника ABC , пересекаются в одной точке (центре описанной окружности). Докажите, что при $k \neq 1$ эти перпендикуляры не могут пересекаться в одной точке, лежащей внутри этого треугольника.

6. Из 324 единичных квадратиков можно сложить квадрат 18×18 . Можно ли из всех этих же квадратиков сложить шестиугольник (возможно, невыпуклый) в шесть раз большего периметра, чем квадрат 18×18 ?

7 В, П, Ю. Докажите, что для любых 12 ; П, Ю) 6 последовательных натуральных чисел найдется простое число, которое является делителем ровно одного из этих чисел.

8 В, П. Маше на день рождения подарили торт треугольной формы. Она отрезала от него два равных куска при помощи двух параллельных прямолинейных разрезов, один из которых проходил через вершину. Докажите, что торт имел форму прямоугольного треугольника.

8 Ю. Разрешается выбрать в десятичной записи натурального числа любую цифру и прибавить ее к числу или отнять ее от числа. Можно ли с помощью таких операций из числа 1996 получить число 96 ?

9 В. На уроке математики учитель попросил учеников задумать по три числа и обозначить их a , b и c . После этого он попросил их сначала записать значение выражения $a^2 + b$, при этом у Васи и у Пети получились одинаковые числа; потом – значение выражения $b^2 + c$, и снова у Васи и у Пети получились одинаковые числа; то же самое произошло при записи значений выражений $c^2 + a$ и $a + b + c$. Докажите, что значения выражения $ab + bc + ca$ у Васи и у Пети также совпадут.

9 П. Сумма трех отличных от нуля чисел a , b и c равна нулю. Найдите значение выражения $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} + \frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}$.

9 Ю. В баскетбольных командах “Юг” и “Север” было по 12 игроков, причем средний рост баскетболистов одной из команд на 1 см больше среднего роста баскетболистов другой команды. После того, как по одному баскетболисту каждой команды уехали на Запад, оказалось, что все равно средний рост баскетболистов одной из этих команд на 1 см больше среднего роста баскетболистов другой команды. На сколько сантиметров один из уехавших баскетболистов выше другого?

10 В. К реке подошли три генерала, каждый – с двумя ординарцами. В их распоряжении имеется только одна лодка, вмещающая не более двух человек. Плавать никто не умеет, зато грести умеют все. Смогут ли все девять человек переправиться на противоположный берег реки, если ни один из генералов не согласен оставлять ни одного из своих ординарцев в присутствии другого генерала ни в лодке, ни на берегу (приставшая к берегу лодка считается частью берега)?

10 П, Ю. К реке подошли два генерала, каждый – с двумя ординарцами, и один полковник с одним ординарцем. В их распоряжении имеется только одна лодка, вмещающая не более двух человек. Плавать никто не умеет, зато грести умеют все. Смогут ли все восемь человек переправиться на противоположный берег реки, если ни генералы, ни полковник не согласны

оставлять ни одного из своих ординарцев в присутствии другого генерала или полковника ни в лодке, ни на берегу (приставшая к берегу лодка считается частью берега)?

ЯГубов.РФ