VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На плоскости нарисовано 1997 прямых. Докажите, что на ней можно так нарисовать оси координат, что произведение угловых коэффициентов данных прямых в этой системе координат будет положительным.

2. Числа a и b больше 1. Докажите, что $a+b+\frac{1}{ab}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab.$

3. На доске выписаны числа 1, 2, …, 1000. На каждом этапе одновременно стираются все числа, имеющие среди нестертых чисел ровно один делитель (например, на первом этапе стирается только число 1). Какие числа будут стерты на последнем этапе?

4. Докажите, что произвольный выпуклый многоугольник можно разбить на конечное число вписанных четырехугольников.

5. Два игрока по очереди красят клетки доски 3×3. Вначале все клетки белые. Первый игрок красит клетки в красный, а второй – в синий цвет. За один ход каждый может закрасить не более трех клеток, из которых не более одной небелой. Первый игрок хочет получить красный квадрат 2×2. Может ли второй ему помешать?

6.

Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Докажите, что на этой плоскости найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой 2 *см* и острым углом 30°.

7.На доске написаны 3 числа (сначала это были числа 5, 11, 17). Разрешается написать на доске сумму двух из них минус третье, после чего стереть то число|, которое вычиталось. Через некоторое время на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 1997. Какие были два остальных?

8. Докажите, что произвольное натуральное число можно представить в виде суммы нескольких слагаемых вида 2^n-1, так, чтобы, если вычеркнуть наименьшее слагаемое, то все оставшиеся будут различными.

9. На занятие кружка пришло 58 учеников. Оказалось, что среди любых 10 из них найдутся хотя бы трое одноклассников. Докажите, что хотя бы 15 из этих учеников – одноклассники.

10. Углы при вершинах B и C треугольника ABC равны 70°, BD – биссектриса угла B. Существует ли на прямой BC такая точка E, что $AD=DE=EC$?

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. На плоскости нарисовано несколько прямых. Докажите, что на ней можно так нарисовать оси координат, что произведение угловых коэффициентов данных прямых в этой системе координат будет положительным.

2. Числа a и b больше 1. Докажите, что $a+b+\frac{1}{ab}<\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+ab.$

3. На доске выписаны числа 1, 2, …, 1000. На каждом этапе одновременно стираются все числа, имеющие среди нестертых чисел ровно один делитель (например, на первом этапе стирается только число 1). Какие числа будут стерты на последнем этапе?

4. Докажите, что произвольный выпуклый многоугольник можно разбить на конечное число вписанных четырехугольников.

5. Два игрока по очереди красят клетки доски 3×3. Вначале все клетки белые. Первый игрок красит клетки в красный, а второй – в синий цвет. За один ход каждый может закрасить не более трех клеток, из которых не более одной небелой. Первый игрок хочет получить красный квадрат 2×2. Может ли второй ему помешать?

6.

Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Докажите, что на этой плоскости найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой 2 *см* и острым углом 30°.

7.На доске написаны 3 числа (сначала это были числа 5, 11, 17). Разрешается написать на доске сумму двух из них минус третье, после чего стереть то число|, которое вычиталось. Через некоторое время на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 1997. Какие были два остальных?

8. Докажите, что произвольное натуральное число можно представить в виде суммы нескольких слагаемых вида 2^n-1, так, чтобы, если вычеркнуть наименьшее слагаемое, то все оставшиеся будут различными.

9. На занятие кружка пришло 58 учеников. Оказалось, что среди любых 10 из них найдутся хотя бы трое одноклассников. Докажите, что хотя бы 15 из этих учеников – одноклассники.

10. Углы при вершинах B и C треугольника ABC равны 70°, BD – биссектриса угла B. Существует ли на прямой BC такая точка E, что $AD=DE=EC$?

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.96. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Два игрока по очереди красят клетки доски 3×3. Вначале все клетки белые. Первый игрок красит клетки в красный, а второй – в синий цвет. За один ход каждый может закрасить не более трех клеток, из которых не более одной небелой. Первый игрок хочет получить красный квадрат 2×2. Может ли второй ему помешать?

2. Докажите, что произвольный выпуклый многоугольник можно разбить на конечное число четырехугольников, у каждого из которых сумма противоположных углов равна 180°.

3. На автобусной остановке стояли несколько школьников. На первом автобусе уехал каждый десятый из них, на втором – каждый седьмой из оставшихся, а на третьем – каждый пятый из оставшихся, после чего на остановке осталось 111 школьников. Сколько школьников было вначале на остановке?

4. На доске написаны 3 числа (сначала это были числа 5, 11, 17). Разрешается написать на доске сумму двух из них минус третье, после чего стереть то число, которое вычиталось. Через некоторое время на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 1997. Какие были два остальных?

5. На доске выписаны числа 1, 2, …, 1000. На каждом этапе одновременно стираются все числа, имеющие среди нестертых чисел ровно один делитель (например, на первом этапе стирается только число 1). Какие числа будут стерты на последнем этапе?

6. Новая фигура "заяц" может ходить на одну клетку вверх по любой диагонали или на клетку вниз по вертикали. За какое наименьшее число ходов заяц сможет обойти все поля доски 7×7 и вернуться на исходное поле?

7. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Докажите, что на этой плоскости найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой 2 см и острым углом 30°.

8. Во время предвыборной кампании каждый из кандидатов на пост президента выступал со своей программой. Среди обещаний, данных кандидатами, было всего пять различных. Оказалось, что наборы обещаний у разных кандидатов различны, однако у любых двух кандидатов совпало по крайней мере по одному обещанию. Какое наибольшее число кандидатов могло участвовать в этой предвыборной кампании?

9. На занятие кружка пришло 58 учеников. Оказалось, что среди любых 10 из них найдутся хотя бы трое одноклассников. Докажите, что хотя бы 15 из этих учеников – одноклассники.

10. Углы при вершинах B и C треугольника ABC равны 72°, BD – биссектриса угла B. Существует ли на прямой BC такая точка E, что $AD=DE=EC$?

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №3. 21.02.96. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Два игрока по очереди красят клетки доски 3×3. Вначале все клетки белые. Первый игрок красит клетки в красный, а второй – в синий цвет. За один ход каждый может закрасить не более трех клеток, из которых не более одной небелой. Первый игрок хочет получить красный квадрат 2×2. Может ли второй ему помешать?

2. Докажите, что произвольный выпуклый многоугольник можно разбить на конечное число четырехугольников, у каждого из которых сумма противоположных углов равна 180°.

3. На автобусной остановке стояли несколько школьников. На первом автобусе уехал каждый десятый из них, на втором – каждый седьмой из оставшихся, а на третьем – каждый пятый из оставшихся, после чего на остановке осталось 111 школьников. Сколько школьников было вначале на остановке?

4. На доске написаны 3 числа (сначала это были числа 5, 11, 17). Разрешается написать на доске сумму двух из них минус третье, после чего стереть то число, которое вычиталось. Через некоторое время на доске оказались три числа, наименьшее из которых равно 1997. Какие были два остальных?

5. На доске выписаны числа 1, 2, …, 1000. На каждом этапе одновременно стираются все числа, имеющие среди нестертых чисел ровно один делитель (например, на первом этапе стирается только число 1). Какие числа будут стерты на последнем этапе?

6. Новая фигура "заяц" может ходить на одну клетку вверх по любой диагонали или на клетку вниз по вертикали. За какое наименьшее число ходов заяц сможет обойти все поля доски 7×7 и вернуться на исходное поле?

7. Каждая точка плоскости окрашена в один из двух цветов. Докажите, что на этой плоскости найдутся три одноцветные точки, являющиеся вершинами прямоугольного треугольника с гипотенузой 2 см и острым углом 30°.

8. Во время предвыборной кампании каждый из кандидатов на пост президента выступал со своей программой. Среди обещаний, данных кандидатами, было всего пять различных. Оказалось, что наборы обещаний у разных кандидатов различны, однако у любых двух кандидатов совпало по крайней мере по одному обещанию. Какое наибольшее число кандидатов могло участвовать в этой предвыборной кампании?

9. На занятие кружка пришло 58 учеников. Оказалось, что среди любых 10 из них найдутся хотя бы трое одноклассников. Докажите, что хотя бы 15 из этих учеников – одноклассники.

10. Углы при вершинах B и C треугольника ABC равны 72°, BD – биссектриса угла B. Существует ли на прямой BC такая точка E, что $AD=DE=EC$?