VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли разбить квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) не менее чем с четырьмя другими?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+}\qquad\qquad \frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(c}$$

1. Если – целое число, то – целое число.

   Доказать.
2. В равнобедренной трапеции *ABCD* диагонали пересекаются в точке *E*. Через концы боковой стороны *AB* и точку *E* проведена окружность с центром *O*. Докажите, что $OE \perp CD$.
3. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
4. Числа a и b таковы, что $ab<0$, число c – произвольно. Докажите, что $a^2+b^2+c^2>2(ab+ac+bc)$.
5. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?
6. Внутри прямого угла *X* взята точка *P*. Рассмотрим всевозможные прямоугольные треугольники *APB*, у которых концы гипотенузы *A* и *B* лежат на сторонах угла *X*. Какую фигуру образуют на плоскости середины отрезков *AB* ?
7. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся “луча” (“лучом” называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ВЫСШАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли разбить квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) не менее чем с четырьмя другими?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?

$$\frac{b}{a(a+b)}+\frac{c}{b(b+c)}+\frac{a}{c(c+}\qquad\qquad \frac{a}{b(a+b)}+\frac{b}{c(b+c)}+\frac{c}{a(c}$$

1. Если – целое число, то – целое число.

   Доказать.
2. В равнобедренной трапеции *ABCD* диагонали пересекаются в точке *E*. Через концы боковой стороны *AB* и точку *E* проведена окружность с центром *O*. Докажите, что $OE \perp CD$.
3. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
4. Числа a и b таковы, что $ab<0$, число c – произвольно. Докажите, что $a^2+b^2+c^2>2(ab+ac+bc)$.
5. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Внутри прямого угла X взята точка P. Рассмотрим всевозможные прямоугольные треугольники APB, у которых концы гипотенузы A и B лежат на сторонах угла X. Какую фигуру образуют на плоскости середины отрезков AB ?

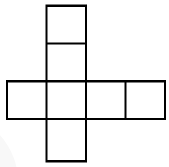
7. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся "луча" ("лучом" называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли с помощью песочных часов на 69 минут и 91 минуту отмерить ровно 1996 минут подряд (песок сыпется равномерно, вначале в каждых часах одна из половинок должна быть пустой)?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?

1. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу AC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.



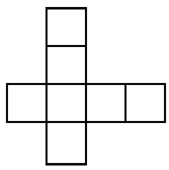
2. Можно ли выложить бесконечный лист клетчатой бумаги неперекрывающимися фмгурками вида (фигурки можно поворачивать)?
3. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочки в нем составляют меньше 44%, но больше 43% ?
4. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
5. Из пункта А в пункт В выехал с постоянной скоростью велосипедист. Одновременно с ним из пункта В в пункт А вышли с постоянными скоростями два пешехода, причем скорость первого больше скорости второго пешехода в полтора раза. Велосипедист встретился с первым пешеходом через 5 часов, а со вторым – еще через 50 минут. Найдите отношения скоростей велосипедиста и пешеходов.
6. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?
7. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся “луча” (“лучом” называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ЮНИОРСКАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли с помощью песочных часов на 69 минут и 91 минуту отмерить ровно 1996 минут подряд (песок сыпется равномерно, вначале в каждых часах одна из половинок должна быть пустой)?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?

1. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу AC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.



2. Можно ли выложить бесконечный лист клетчатой бумаги неперекрывающимися фмгурками вида (фигурки можно поворачивать)?
3. Какое наименьшее число участников может быть в математическом кружке, если известно, что девочки в нем составляют меньше 44%, но больше 43% ?

4. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
5. Из пункта А в пункт В выехал с постоянной скоростью велосипедист. Одновременно с ним из пункта В в пункт А вышли с постоянными скоростями два пешехода, причем скорость первого больше скорости второго пешехода в полтора раза. Велосипедист встретился с первым пешеходом через 5 часов, а со вторым – еще через 50 минут. Найдите отношения скоростей велосипедиста и пешеходов.
6. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?
7. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся “луча” (“лучом” называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли разбить квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) не менее чем с четырьмя другими?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?
4. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу AC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.
5. Числа a и b таковы, что $ab<0$, число c – произвольно. Докажите, что $a^2+b^2+c^2>2(ab+ac+bc)$.
6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Через концы боковой стороны AB и точку E проведена окружность с центром O. Докажите, что $OE\perp CD$
7. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
8. Из пункта А в пункт В выехал с постоянной скоростью велосипедист. Одновременно с ним из пункта В в пункт А вышли с постоянными скоростями два пешехода, причем скорость первого больше скорости второго пешехода в полтора раза. Велосипедист встретился с первым пешеходом через 5 часов, а со вторым– еще через 50 минут. Найдите отношения скоростей велосипедиста и пешеходов.
9. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?
10. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся “луча” (“лучом” называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.

VII УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. КИРОВ, 17–22.02.96

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ №1. 19.02.96. ПЕРВАЯ ЛИГА

1. Найдите все тройки натуральных чисел, таких, что сумма чисел каждой тройки равна 1996, а сумма любых двух из них кратна третьему.
2. Можно ли разбить квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) не менее чем с четырьмя другими?
3. Трое ребят играли в слова. Каждый составил по 10 слов. Если слово есть у всех, оно вычеркивается, если ровно у двоих – оба получают по одному очку, за остальные свои слова каждый получает по три очка. В итоге все трое набрали разное количество очков, меньше всех – 19 очков – набрал Кузя. По сколько очков набрали остальные игроки?
4. Катеты AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC равны 1. Окружность, вписанная в угол BAC, делит гипотенузу AC на 3 равные части. Найдите радиус окружности.
5. Числа a и b таковы, что $ab<0$, число c – произвольно. Докажите, что $a^2+b^2+c^2>2(ab+ac+bc)$.
6. В равнобедренной трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E. Через концы боковой стороны AB и точку E проведена окружность с центром O. Докажите, что $OE\perp CD$
7. Можно ли так расставить шахматных коней на бесконечной клетчатой доске, чтобы любые две соседние клетки находились под боем различного числа коней? (Соседними называются клетки, имеющие одну или две общих вершины.)
8. Из пункта А в пункт В выехал с постоянной скоростью велосипедист. Одновременно с ним из пункта В в пункт А вышли с постоянными скоростями два пешехода, причем скорость первого больше скорости второго пешехода в полтора раза. Велосипедист встретился с первым пешеходом через 5 часов, а со вторым– еще через 50 минут. Найдите отношения скоростей велосипедиста и пешеходов.
9. На доске выписаны все целые числа от 1 до 14, каждое – по одному разу. Двое играющих по очереди стирают по одному числу до тех пор, пока не останется ровно два числа. Если их сумма – точный квадрат, то выигрывает второй, иначе – первый. Кто выигрывает при правильной игре?
10. Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два непересекающихся “луча” (“лучом” называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой неудаленной клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали неудаленную клетку, которая не была пройдена ранее.