

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ БОЙ 2.11.95. ПЕРВАЯ ЛИГА.

1. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC. Найти углы треугольника ABC, если $AC = 2AB$.
2. Найдите наибольшее возможное стозначное число, десятичная запись которого состоит из 50 единиц и 50 двоек, причем никакие четыре соседние цифры не образуют число 2111.
3. Участники международного турнира разбиты на несколько отборочных групп, причем любые две группы отличаются по количеству участников не более чем на 1. Известно, что спортсменов от каждой страны не больше, чем групп. Докажите, что можно перераспределить спортсменов по группам так, чтобы численность групп не изменилась, и при этом ни в какой группе не было двух спортсменов из одной страны.
4. Последовательные числа 22, 23 и 24 обладают тем свойством, что в разложение каждого из них на простые множители каждый множитель входит в нечетной степени: $22=2^1 \cdot 11^1$, $23=23^1$, $24=2^3 \cdot 3^1$. А какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может обладать таким свойством?
5. Над пятизначными числами разрешается производить следующую операцию: любую цифру числа можно заменить на последнюю цифру суммы цифр этого числа. Можно ли с помощью этих операций из числа 13579 получить число 12345?
6. Учитель написал на доске 5 уравнений: $ax+b=0$, $bх+c=0$, $сх+d=0$, $dx+e=0$, $ex+a=0$. Сеня похвастался, что может заменить буквы a,b,c,d,e числами так, что три из этих уравнений не будут иметь решений. Докажите, Сеня что не прав.
7. Двое играющих по очереди отмечают узлы решетки, делящей прямоугольник 21×20 на единичные квадратики. Проигрывает тот, после чьего хода найдется прямая, проходящая через центр прямоугольника и две отмеченные точки. Кто выигрывает при правильной игре?
8. Секретный объект представляет собой 100-угольник, образованный сторонами коридоров. Коридор может быть освещен или затемнен. В каждой вершине расположен выключатель, который меняет на противоположные освещенности двух сходящихся в этой вершине коридоров. Вначале весь объект затемнен. Сторож находится в одной из вершин, и хочет, переключая свет и двигаясь только по освещенным коридорам, перейти в пятидесятую по счету вершину и снова затемнить объект. Удастся ли ему это и почему?
9. Найдите наименьшее натуральное число, которое обладает следующими свойствами: а) оно не кратно 11; б) если заменить любую его цифру на цифру, отличающуюся на 1, то полученное число будет кратно 11.
10. Большой ладьей называется шахматная фигура, которая ходит и бьет как обычная ладья, но только на одну или две клетки. Какое наибольшее число больших ладей можно расставить на шахматной доске 8×8 так, чтобы они не били друг друга?