Третий Уральский (второй Кировский) турнир юных математиков, 16-21 февраля 1994 года

Аукцион. 16.02.1994

Правила аукциона.

1. *Начальная цена объявляется ведущим.*

2. *За право ответа платит команда. Возможен торг. Отвечает команда, заплатившая наивысшую цену.*

3. *Всю стоимость задачи получает команда, давшая верный ответ последней.*

4. *Время на обдумывание задачи: 2-5 минут в начале и не более 1 минуты в ходе аукциона.*

5. *Команда имеет право не объявлять свой результат до начала ответа.*

6. *За указание ошибки команда получает 50% взноса ошибшейся команды. Но при неверном указании на ошибку — штраф в том же размере.*

Задачи (начальная цена — 50).

1. Дана запись 19941994. Составить из нее (вставляя знаки арифметических действий и скобки) как можно больше натуральных чисел (начиная с 1), идущих подряд. (Побеждает команда, составившая последнее число).

2. Разместить на плоскости 8 прямых так, чтобы получилось как можно больше треугольников.

3. Найти как можно больше решений ребуса ЗЕК+ЗЕК = БАМ.

4. Разрезать квадрат на как можно меньшее число остроугольных треугольников.

5. Найти как можно больше решений уравнения $x^2+y^3 = z^2$ в натуральных числах, не превосходящих 100.

6. Записать число 1994 как можно меньшим числом шестерок.

7. Суперконь бьет те же клетки, что и обычный конь, а также клетки, соседние по диагонали с той, на которой он стоит. Расставить на шахматной доске 8×8 как можно больше суперконей, не бьющих друг друга.

8. У квадрата со стороной 2 отмечены вершины, середины сторон и центр. Соединить девять отмеченных точек как можно более короткой связной сетью отрезков (бремя доказывания краткости — на докладчике).

Реально были отыграны задачи 1, 3 и 5.

Математическая олимпиада. 17.02.1994

В скобках после номера задачи указаны классы, ученикам которых она предназначена. Можно решать задачи и для классов старше своего. Но семиклассников просим не беспокоиться по поводу задачи №1, а восьмиклассников — по поводу задач 1-3: решения этих задач им засчитываться не будут.

1 (6). Два шахматиста сыграли матч из 40 партий, в котором за победу начислялось 4 очка, за ничью — 2 очка и за поражение — 1 очко. При этом вместе они набрали 170 очков.

а) Сколько в этом матче могло быть ничьих?

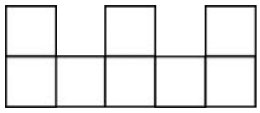
б) Мог ли победитель матча набрать 90 очков?

2 (6-7). Покрышки на передних колесах автомобиля стираются через 25000 км пробега, а на задних — через 15000 км пробега. Через сколько километров пробега надо поменять местами покрышки передних и задних колес, чтобы автомобиль прошел с одними и теми же покрышками наибольшее возможное расстояние?

3 (6-7). Квадрат размером 6×6 клеточек разрезан по сторонам клеточек на 8 прямоугольников. Докажите, что какие-то два из этих прямоугольников равны по площади.

4 (6-8). Между цифрами числителя и знаменателя дроби 27/72 вписали одно и то же пятизначное число. Оказалось, что новая дробь равна исходной. Найдите вписанное число (укажите все возможные варианты).

5 (6-8). Из восьми одинаковых квадратов составили фигуру, показанную на рисунке справа. На какое наименьшее число прямоугольников, равных по площади, можно ее разрезать?



6 (6-8). Каждое из натуральных чисел a, b, c, d делится на разность $ab–cd$. Докажите, что эта равность равна 1 или –1.

7 (7-8). На стороне AC равностороннего треугольника ABC взята точка M, а на продолжении стороны BC за вершину C — точка K таким образом, что $BM = MK$. Докажите, что $AM = CK$.

8 (8). На бумаге нарисован правильный пятиугольник со стороной 2. Его хотят целиком покрыть салфетками в форме правильного пятиугольника со стороной 1. Какое наименьшее число салфеток для этого потребуется?

9 (8). Назовём человека малообщительным, если у него меньше 10 знакомых. Назовём человека чудаком, если все его знакомые малообщительны. Докажите, что малообщительных людей не меньше, чем чудаков.

Математический бой №1. 18.02.1994

1. Точку внутри пятиугольника соединили с его вершинами, в результате чего пятиугольник оказался разбитым на пять равных между собой неравнобедренных треугольников. Докажите, что эти треугольники — прямоугольные.

2. На острове Невезения, где живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, прошли выборы президента. Кандидатов было двое: Ёлкин и Палкин. На вопрос наблюдателя ООН: "За кого Вы голосовали?" большинство жителей ответили: "За Ёлкина", а на вопрос: "Кто стал президентом?" большая часть жителей ответила: "Палкин". Известно, что рыцари, голосовавшие за проигравшего кандидата, составляют не менее четверти всего населения. Докажите, что президентом стал Палкин.

3. Найдите все решения уравнения $4[x] = 25\{x\} - 4{,}5$. Здесь $[x]$ означает *целую часть* числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее числа x, а $\{x\}$ есть *дробная часть* числа x, равная по определению $x - [x]$.

4. Цифры A, B и C таковы, что $2C = 3A + B$. Докажите, что трехзначное число $\overline{ABC}$ делится на 7.

5. Клетки таблицы 4×4 занумерованы в произвольном порядке натуральными числами от 1 до 16. Могут ли суммы номеров по всем строкам и столбцам быть восемью последовательными натуральными числами?

6. Баба-Яга и Кощей собрали некоторое количество мухоморов. Количество крапинок на мухоморах Бабы-Яги было в 12 раз больше, чем на мухоморах Кощея, но когда она отдала Кощею свой мухомор с наибольшим количеством крапинок, на ее мухоморах стало крапинок только в 7 раз больше, чем у Кощея. Докажите, что Баба-Яга собрала не меньше 20 мухоморов.

7. На доске написаны 1994 единицы. Двое играют в такую игру. Первый может своим ходом стереть любые два числа и записать вместо них их сумму. Второй своим ходом может стереть любые два числа и записать вместо них их произведение. Первый стремится к тому, чтобы число, которое останется на доске после 1993 ходов, было как можно меньше, а второй — к тому, чтобы оно было как можно больше. Какого наилучшего результата сможет добиться второй при безошибочной игре первого? (Покажите, что второй всегда сможет добиться такого или лучшего результата, но первый может помешать ему добиться лучшего).

8. Имеется три кучи камней. Разрешается выбрать любую из куч и добавить в нее столько камней, сколько их имеется в двух других кучах вместе, или, если это возможно, убрать из нее такое же количество камней. Может ли одна из куч после нескольких таких действий полностью исчезнуть, если первоначально в кучах было 1993, 199 и 18 камней?

9. Каждое из чисел A, B, C, D, E, F, G, H, K равно 1 или –1. Какое наибольшее значение может принимать выражение $AEK - AFH + BFG - BDK + CDH - CEG$?

10. Внутри выпуклого четырехугольника $ABCD$ взята точка O. Докажите, что верно хотя бы одно из четырех неравенств: $\angle BOC > \angle CBO$, $\angle COD > \angle OCD$, $\angle DOA > \angle ODA$, $\angle AOB > \angle OAB$.

Математический бой №2. 19.02.1994

1. Решите уравнение: $[x^3] + [x^2] + [x] = \{x^{1994}\} - 1$.

2. Петя выписывает подряд числа 11, 111, 1111, … Мама обещала ему шоколадку, если он дойдет в этом ряду до квадрата какого-нибудь натурального числа. Есть ли у Пети шанс получить награду?

3. На окружности отмечены 225 точек, делящих ее на равные дуги. Из них 91 точка отмечена красным цветом. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с вершинами в красных точках.

4. В трапеции длина одной из диагоналей равна сумме длин оснований, а угол между диагоналями равен 60 градусам. Докажите, это эта трапеция — равнобедренная.

5. Натуральное число x не имеет в своей записи нулей и удовлетворяет равенству $xy = 1000 + t$, где y — это число, записанное теми же цифрами, что и x, но в обратном порядке, а t — произведение цифр числа x. Найдите все такие числа x.

6. В некотором государстве каждые два города соединены ровно одной дорогой: либо это шоссе, либо железная дорога. Докажите, что можно выбрать один вид транспорта — автомобиль или поезд — так, чтобы из любого города в любой можно было проехать, используя только этот вид транспорта и не заезжая по дороге больше, чем в два других города.

7. Докажите равенство $\dfrac{(2^3+1)(3^3+1)\ldots(100^3+1)}{(2^3-1)(3^3-1)\ldots(100^3+1)} = \dfrac{5050}{3367}$.

8. На доске написаны числа 100 и 200. За один ход можно вычесть из любого числа какой-либо делитель другого (не превосходящий первого числа) и записать вместо уменьшаемого получившуюся разность. Выигрывает тот, кто после очередного хода получает два нуля. Кто выиграет при правильной игре?

9. Вычислите сумму $\dfrac{1}{1+a+ab} + \dfrac{1}{1+b+bc} + \dfrac{1}{1+c+ca}$, если известно, что $abc = 1$.

10. За столом сидят несколько мальчиков и 5 девочек, а на столе лежат 30 булочек. Каждая девочка дала по булочке (с тарелки) каждому знакомому ей мальчику, а затем каждый мальчик дал по булочке (с тарелки) каждой незнакомой ему девочке. После этого оказалось, что все булочки розданы. Сколько было мальчиков?

9*. Точка M — середина стороны BC выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что угол AMD равен 120 градусам. Докажите, что $2ab + bc + 2cd > 2da$.

10*. В прямоугольной таблице некоторые клетки отмечены звездочкой. Известно, что для любой отмеченной клетки количество звездочек в ее столбце совпадает с количеством звездочек в ее строке. Докажите, что число строк таблицы, в которых есть хоть одна звездочка, равно числу столбцов таблицы, в которых есть хоть одна звездочка.

Задачи 9 и 10* заменяли задачи 9 и 10 в вариантах, предназначенных для боев четырех сильнейших (победивших в первом туре) команд между собой.*

Математический бой №3. 20.02.1994

1. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c выполнено неравенство

$$\frac{1+a^4}{bc}+\frac{1+b^4}{ac}+\frac{1+c^4}{ab}\geq 6$$

2. В k стаканах достаточно большой вместимости содержится поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько уже имеется в последнем. При каких k можно за конечное число шагов слить всю воду в один стакан?

3. $\overline{ABC}$ — трехзначное число. Может ли число $\overline{ABC}+\overline{BCA}+\overline{CAB}$ быть квадратом натурального числа?

4. Имеется неограниченное количество белых и черных кубиков. Нужно построить из них сплошную башню в форме прямоугольного параллелепипеда так, чтобы каждый черный кубик в ней граничил с нечетным числом белых, а каждый белый — с нечетным числом черных. Докажите, что при любом заданном нижнем слое такую башню (конечной высоты) можно построить.

5. Каждое из чисел от 1 до 23 написали на 23 карточках. Затем полученные 529 карточек разложили по клеткам квадратной таблицы 23×23, причем числа оказались расположены симметрично относительно одной из диагоналей таблицы. Найдите сумму чисел, стоящих на этой диагонали.

6. Возле каждой из двух диаметрально противоположных точек окружности написано число 1. Каждая из двух полуокружностей с концами в этих точках делится пополам, и возле точки деления записывается число, равное сумме чисел, стоящих у концов полуокружности. Затем та же процедура проделывается с каждой из получившихся дуг, и так k раз подряд. Найдите сумму всех записанных чисел.

7. Отрезки AB и CD равны и перпендикулярны, причем точка C лежит внутри отрезка AB. Точка X такова, что треугольники XAD и XBC — равнобедренные с вершиной в точке X. Докажите, что эти треугольники — прямоугольные.

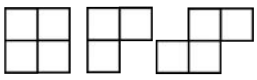
8. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и F соответственно. E — середина отрезка DF. Докажите, что $AD + FC \leq AE + EC$.

9. Все монеты в коллекции нумизмата Феди имеют диаметр не более 10 см. Он хранит их в плоской коробке размером 30×70 см. Ему подарили монету диаметром 25 см. Докажите, что теперь он сможет разместить все свои монеты в плоской квадратной коробке со стороной 55 см. Монеты не должны налегать друг на друга.

10. Три автомата меняют деньги, причем первый всегда меняют одну монету на две другие, второй всегда меняют одну монету на четыре другие, а третий — одну монету на девять других. После 12 таких обменов удалось из одной монеты получить 81 монету. Сколько раз использовался каждый из автоматов?

9*. Можно ли разбить все числа от 1 до 100 на три группы так, чтобы сумма всех чисел первой группы делилась на 102, второй — на 203, а третьей — на 304?

10*. Квадрат размером $(2k–1)\times(2k–1)$ клеточек разрезан на фигурки трех типов, показанных на рисунке справа. Докажите, что трехклеточных "уголков" при этом получилось не менее, чем $4k–1$.



9.** На одном из полей доски 7×7 стоит фишка. Разрешается последовательно ставить на пустые поля новые фишки, но так, чтобы поле, на которое выставляется очередная фишка, имело общую сторон не более чем с одним уже занятым полем. Какое наибольшее количество фишек может оказаться на доске после нескольких таких операций?

10.** Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равнобедренные треугольники с углом в 10 градусов при вершине.

Задачи 9 и 10* заменяли задачи 9 и 10 в вариантах, предназначенных для боя за 3 место, а задачи 9** и 10** — в вариантах, предназначенных для боя за 1 место.*

Ягубов.РФ