11 класс

1. Дана последовательность чисел x_n такая, что $x_1 = 2019$, $x_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{x_n}$. Найдите x_{1000}.

2. В последовательности квадратных трехчленов $x^2 + x + b$, $x^2 + 2x + (b + 1)$, $x^2 + 3x + (b + 2), \ldots$ некоторые два трехчлена имеют общий корень. Какие корни может иметь 2019-й трехчлен этой последовательности?.

3. Кадеты из двух стран сидят за круглым столом. Известно, что представителей одной страны в три раза больше, чем другой, а пар рядом сидящих кадетов из одной страны в два раза больше, чем пар рядом сидящих кадетов из разных стран. При каком наименьшем количестве кадетов, сидящих за столом, это возможно? Обоснуйте свой ответ.

4. Сумма первых трех последовательных членов арифметической прогрессии в 10 раз меньше суммы их кубов, при этом обе суммы ненулевые. Может ли эта прогрессия состоять из целых чисел?

5. Продолжения медиан CM и AN треугольника ABC пересекают описанную около треугольника ABC окружность в точках P и Q соответственно. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $CP = 2CM, AN : NQ = 7 : 3$.

6. Пусть x и y — положительные числа такие, что $x^3 + y^3 + (x + y)^3 + 30xy = 2000$. Чему может быть равно $x + y$?

11 класс

1. *Ответ:* 2019.

Вычислив последовательно первые четыре члена последовательности, получаем, что $x_1 = x_4 = 2019$. Значит, члены последовательности идут через три номера с повтором. Поскольку $1000 = 1 + 3 \cdot 333$, то $x_{1000} = x_1 = 2019$.

2. *Ответ:* -1 и -2018.

Пусть трехчлены $x^2+mx+(b+m-1)$ и $x^2+nx+(b+n-1)$ имеют общий корень t. Тогда $t^2+mt+(b+m-1) = t^2+nt+(b+n-1)$, откуда $(m-n)t+(m-n) = 0$. Но $m-n \neq 0$, поэтому $t+1=0$, то есть $t=-1$. Подставляя этот корень в квадратный трехчлен, получаем: $1-m+(b+m-1)=0$, откуда $b=0$. Тогда 2019-й трехчлен есть $x^2+2019x+2018=0$, его корни $x_1=-1$ и $x_2=-2018$.

3. *Ответ:* 12.

Пусть n — количество кадетов из страны A, $3n$ — из страны B. Пусть количество пар кадетов из разных стран, сидящих рядом, равно m, тогда количество пар кадетов из одной страны, сидящих рядом, равно $2m$. Общее число кадетов равно, с одной стороны, $4n$, и равно, с другой стороны, $3m$ (общее количество пар соседей совпадает с количеством сидящих за столом). Итак, $4n = 3m$, откуда n делится на 3, значит, $n \geqslant 3$. Тогда общее количество кадетов не меньше 12. Осталось привести пример рассадки 3 кадетов из страны A и 9 кадетов из страны B, при которой образуются 4 пары соседей из разных стран и 8 пар — из одной страны. Таковой является, например, рассадка: $-B-A-A-B-A-B-B-B-B-B-B-B-$.

4. *Ответ:* Нет.

Пусть $a-d,\ a,\ a+d$ — члены арифметической прогрессии. Если они целые, то и d целое. Их сумма равна $S=3a$, а сумма их кубов равна

$$(a-d)^3+a^3+(a+d)^3 = 3a^3+6ad^2 = S(a^2+2d^2).$$

Значит, $a^2+2d^2=10$. Это уравнение не имеет целых решений относительно a при всех целых d таких, что $|d| \leqslant 2$, а при $|d| \geqslant 3$ левая его часть больше 10. Значит, уравнение $a^2+2d^2=10$ не имеет решений в целых числах, так что ответ на вопрос задачи отрицательный.

5. *Ответ:* $\angle ABC = 30°$, $\angle BAC = 60°$, $\angle ACB = 90°$.

Рассмотрим четырехугольник $ACBP$ (рис. 4). Из условия следует, что его диагонали AB и CP точкой пересечения M делятся пополам. Значит, этот четырехугольник — параллелограмм. Но вписанный в окружность параллелограмм — это прямоугольник. Значит, угол ACB — прямой, а сторона AB — диаметр окружности. Обозначим $AN = 7x, NQ = 3x$ и $CN = NB = y$. По теореме о пересекающихся хордах получаем, что $AN \cdot NQ = CN \cdot NB$, то есть $21x^2 = y^2$. Тогда по теореме

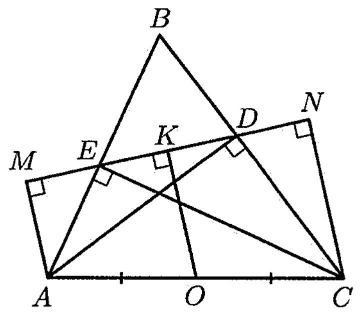

Рис. 3

его высота OK является также и медианой. Поскольку OK перпендикулярна ED, то прямые AM, OK и CN параллельны, то есть OK — средняя линия трапеции $CAMN$. Отсюда $MK = NK$. А так как $EK = KD$, то $ME = DN = 1$.

2-й способ: Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Из подобия треугольников ABD и CBE следует подобие треугольников ABC и DBE, откуда $\angle BDE = \alpha$, $\angle BED = \gamma$. Значит $ME = AE\cos\gamma = AC\cos\alpha\cos\gamma$. Аналогично, $DN = DC\cos\alpha = AC\cos\alpha\cos\gamma$.

6. *Ответ:* 15.

Пусть цифры расставлены по кругу требуемым образом. Если исключить 0, то остальные цифры разбиваются на три группы по три подряд идущих цифры. Тогда по условию сумма цифр в каждой группе не превосходит k, поэтому сумма всех цифр (включая ноль) не превосходит $3k$. С другой стороны, сумма всех цифр есть $0+1+2+\ldots+9 = 45$. Итак, $45 \leqslant 3k$, откуда $k \geqslant 15$. Пример требуемой расстановки цифр для $k = 15$: $-0-9-5-1-8-4-3-7-2-6-$.

10 класс

1. Двузначное число M умножили на каждую его цифру и получили трехзначное число, составленное из одинаковых цифр. Найдите наибольшее M, обладающее таким свойством.

2. Перед началом занятия, на которое был приглашен математик, кадеты договорились между собой, что некоторые из них на все вопросы математика будут всегда говорить правду, а остальные — всегда лгать. Во время занятия математик попросил каждого кадета сказать про каждого из оставшихся, лжет ли он или говорит правду. Суммарно в ответах кадетов было названо 32 говорящих правду и 40 лгущих. Сколько кадетов было на занятии? Сколько из них говорит правду, если известно, что их большинство?

3. Известно, что $\dfrac{1}{x-y}+\dfrac{1}{y-z}+\dfrac{1}{z-x}=2$. Найдите $\dfrac{1}{(x-y)^2}+\dfrac{1}{(y-z)^2}+\dfrac{1}{(z-x)^2}$.

4. Дан многочлен

$$P(x)=x^{2018}+\frac{1}{2}x^{2017}+\frac{1}{3}x^{2016}+\ldots+\frac{1}{2018}x+\frac{1}{2019}.$$

Существует ли такое натуральное число n, что у многочлена $P(x+n)-P(x)$ все коэффициенты целые?

5. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Найдите ME, если $DN=1$.

6. По кругу написаны все цифры от 0 до 9 в некотором порядке так, что сумма любых трех подряд идущих цифр не превосходит некоторого натурального числа k. Найдите наименьшее k, при котором это возможно.

10 класс

1. *Ответ:* 37.

Пусть a и b — первая и вторая цифра числа M соответственно. Произведение имеет с одной стороны вид abM, а с другой — вид $111c = 3 \cdot 37c$, где c — цифра трехзначного числа из условия задачи. Поскольку цифры не могут делиться на простое число 37, то M делится на 37. Значит $M = 37$ или $M = 74$. Поскольку abM делится на 3, то подходит только первый ответ: произведение при этом равно 777.

2. *Ответ:* Всего 9 кадетов, из них 5 говорят правду.

Пусть на занятии находилось x кадетов, тогда каждый из них дал $x - 1$ ответ, поэтому $x(x-1) = 32 + 40 = 72$, откуда $x = 9$.

Пусть среди этих 9 кадетов y говорящих правду, тогда лжецов — $(9-y)$. Поэтому 40 ответов «лжет» каждый из говорящих правду дал $(9-y)$ раз, а каждый из лгущих — y раз. Имеем: $y(9-y)+(9-y)y = 40$, откуда $y = 4$ или $y = 5$. Но кадетов, говорящих правду, больше, поэтому $y = 5$.

3. *Ответ:* 4.

Обозначим данную сумму и искомую сумму через A и B соответственно. Возведя сумму A в квадрат, получаем:

$$4 = A^2 = B + 2\left(\frac{1}{(x-y)(y-z)} + \frac{1}{(y-z)(z-x)} + \frac{1}{(z-x)(x-y)}\right).$$

Но выражение в скобках равно нулю, так как после приведения к общему знаменателю оно принимает вид $\frac{(x-y)+(y-z)+(z-x)}{(x-y)(y-z)(z-x)}$.

4. *Ответ:* Да.

При каждом натуральном k по формуле разности одинаковых степеней имеем:

$$(x+n)^k - x^k = n\left((x+n)^{k-1} + (x+n)^{k-2}x + \ldots + (x+n)x^{k-2} + x^{k-1}\right) = nQ_{k-1}(x),$$

где $Q_{k-1}(x)$ — некоторый многочлен степени k с целыми коэффициентами. Значит,

$$P(x+n) - P(x) = nQ_{2017}(x) + \frac{n}{2}Q_{2016}(x) + \frac{n}{3}Q_{2015} + \ldots + \frac{n}{2017}Q_1(x) + \frac{n}{2018}.$$

Из полученного равенства видно, что многочлен $P(x+n) - P(x)$ будет иметь целые коэффициенты, если n делится на все натуральные числа от 1 до 2018. В частности, подходит число $n = 2018! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2018$.

5. *Ответ:* 1.

1-й способ: Поскольку отрезок AC виден из точек D и E под прямым углом, то точки A, E, D, C лежат на окружности с диаметром AC, значит, $OE = OD$, где O — середина стороны AC (рис. 3). Тогда треугольник EOD — равнобедренный, поэтому

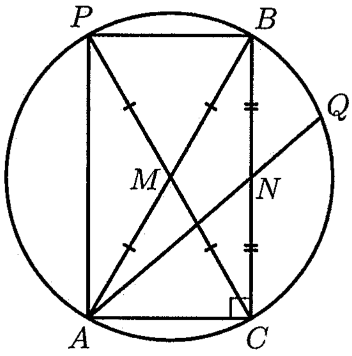

Рис. 4

Пифагора из треугольника ACN получаем, что $AC^2 = (7x)^2 - y^2 = 28x^2$. Но тогда $\operatorname{tg}\angle BAC = \frac{2y}{x\sqrt{28}} = \sqrt{3}$. Мы получили, что угол BAC равен $60°$. Тогда $\angle ABC = 30°$.

6. *Ответ:* 10.

Обозначим $x + y = a,\ xy = b$. Преобразуем левую часть данного равенства:

$$x^3 + y^3 + (x+y)^3 + 30xy = (x+y)(x^2 + 2xy + y^2 - 3xy) + (x+y)^3 + 30xy =$$
$$= a(a^2 - 3b) + a^3 + 30b = 2a^3 - 3ab + 30b.$$

Итак, мы получили уравнение: $2a^3 - 3ab + 30b = 2000$, или после преобразований $2(a^3 - 1000) = 3b(a - 10)$. Число $a = 10$ удовлетворяет равенству. Пусть $a \neq 10$. Тогда после деления уравнения на $(a - 10)$ получаем $2(a^2 + 10a + 100) = 3b$. Это равенство невозможно, так как для положительных чисел $(x+y)^2 \geqslant 4xy$, то есть $a^2 \geqslant 4b$, и, значит, левая часть равенства всегда больше правой.