Часть 26. Ограниченность, монотонность и пр.

26.1. $\sin^{2020}x+\cos^{2020}x=1$. **26.2.** $\sqrt{\sin^3 x}+\sqrt{\cos^3 x}=\sqrt{2}$. **26.3.** $\sin x+\sin 9x=2$. **26.4.** $2^{-\cos x}=\log_\pi x+\log_x \pi$.
26.5. $2^{1-|4x-1|}=\operatorname{tg}\pi x+\operatorname{ctg}\pi x$. **26.6.** а) $x^2=-\cos x$; б) $2\cos\dfrac{\pi x}{2}=x^2+4x+5$. **26.7.** $2^x=3-x$.

26.8. а) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\geqslant 1$; б) $\sqrt{4+x}+\sqrt[4]{16-x}>2$. **26.9.** $\arcsin(x^2-2x+2)=\dfrac{\pi x}{2}$.

26.10. а) $2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x$; б) $\dfrac{1}{2^{\sin^2 x}}+\dfrac{1}{2^{\cos^2 x}}=\sin x+\cos x$. **26.11.** $\log_3(8+2x-x^2)=2^{x-1}+2^{1-x}$.

26.12. $\log_2(3-|\cos x|)=2^{-|\pi-x|}$. **26.13.** а) $\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin^2 3x$; б) $\sin x(\cos 2x+\cos 6x)+\cos^2 x=2$.

26.14. $\cos\dfrac{16\pi}{16x^2-8x+49}=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x+\operatorname{ctg}^2\pi x}$. **26.15.** $2^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geqslant 1$.

26.16. $(x^2-2x+3)(y^2+6y+12)=6$. **26.17.** $\log_2\left(\cos^2 xy+\dfrac{1}{\cos^2 xy}\right)=\dfrac{1}{y^2-2y+2}$.

26.18. $\left(\sin^2 x+\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\dfrac{1}{2}\sin y$. **26.19.** $\cos x-y^2-\sqrt{y-x^2-1}\geqslant 0$.

26.20. $x=\sin\dfrac{\pi(x+1)}{3}\sin\dfrac{\pi(1-x)}{3}$, $0\leqslant x\leqslant 1$. **26.21.** $x^2+4x\cos xy+4=0$. **26.22.** $\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\dfrac{3}{2}$.

26.23. $\operatorname{tg}^2 x+2(\sin y+\cos y)\operatorname{tg}x+2=0$. **26.24.** а) $\begin{cases}|xy-4|=8-y^2,\\ xy=2+x^2;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y^2-|xy|+2=0,\\ 8-x^2=(x+2y)^2.\end{cases}$

26.25. а) $12x+\sqrt{3x^4+4x^5-4x^6}\log_2 x^2>3\sqrt{3+4x-4x^2}+4x^3\log_4 x^4$; б) $\sqrt{2-5x-3x^2}+2x>2x\cdot 3^x\cdot\sqrt{2-5x-3x^2}+4x^2\cdot 3^x$.

26.26. а) $\dfrac{6-3^{x+1}}{x}>\dfrac{10}{2x-1}$; б) $\dfrac{6}{2x+1}>\dfrac{1+\log_2(2+x)}{x}$.

26.27. $\begin{cases}|x+2|-2\leqslant x,\\ (2^{x+1}+2^{x-1}+2^{1-x})\sin\dfrac{\pi x}{2}+\cos\pi x=3+2^{2x-1}.\end{cases}$ **26.28.** $\begin{cases}|x+3|-3\leqslant x,\\ (2^{x+2}+2^x+2^{-x})\cos\dfrac{\pi x}{2}=\cos\pi x+3+2^{2x+1}.\end{cases}$

26.29. а) $\sqrt{x^2-4}\,(3\sin^2 x+10\sin x\cos x+11\cos^2 x-2\sqrt[3]{301})=5\pi^2-4(\arcsin y)^2-4(\arccos y)^2$;
б) $\sqrt{2-|y|}\,(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\dfrac{5}{4}\pi^2$.

26.30. а) $\begin{cases}(2-x)(3x-2z)=3-z,\\ y^3+3y^2=x^2-3x+2,\\ z^2+y^2=6z,\\ z\leqslant 3;\end{cases}$ б) $\begin{cases}y+2=(3-x)^3,\\ (2z-y)(y+2)=9+4y,\\ x^2+z^2=4x,\\ z\geqslant 0.\end{cases}$

26.31. а) $\begin{cases}y\sin x=\log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|,\\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x})=25y^2+6y+1,\\ |y|\leqslant 1;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(3-y^2)\cos^2 x=\log_3\left|\dfrac{8+y}{y(1-\sin^3 x)}\right|,\\ (y^2+8y)(3^{2+2\sin^4 x}+3^{2\cos^4 x+\sin^2 2x-4})=2y^2+16y+64,\\ 1\leqslant y<10.\end{cases}$

26.32. а) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{(x-y)^2}{2}-(x-y)^4}=y^2-2x^2,\\ y\geqslant 4x^4+4yx^2+\dfrac{1}{2};\end{cases}$ б) $\begin{cases}y^6+y^3+2x^2=\sqrt{xy-x^2y^2},\\ 4xy^3+y^3+\dfrac{1}{2}\geqslant 2x^2+\sqrt{1+(2x-y)^2}.\end{cases}$

26.33. а) $4\left(3\sqrt{4x-x^2}\sin^2\dfrac{x+y}{2}+2\cos(x+y)\right)=13+4\cos^2(x+y)$;
б) $\dfrac{3+2\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{\sin^2(x-y)}{2}$.

26.34. а) $\sqrt{15x^2+2y^2-2z^2-3\sqrt{5}x-2y+10z-4}+\sqrt{5x^2-2\sqrt{5}x\cos\pi y\cos\pi z+1}=0$;
б) $\sqrt{\dfrac{3}{2}x^2-2y^2+2z^2+10z+6y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-17}+\sqrt{3x^2-2\sqrt{3}(\cos\pi y+\cos\pi z)x+4}=0$.

26.35. а) $\sin 3x-2\sin 18x\sin x=3\sqrt{2}-\cos 3x+2\cos x$; б) $2\sqrt{3}\sin 5x-\sqrt{3}\sin x=\cos 24x\cos x+2\cos 5x-6$.
26.36. а) Среди всех решений (x, y, z, v) системы
$$\begin{cases}x^2+y^2=4,\\ z^2+v^2=9,\\ xv+yz\geqslant 6\end{cases}$$
найдите такие, при которых выражение $x+z$ принимает наибольшее значение.
б) Среди всех решений (a, b, c, d) системы
$$\begin{cases}a^2+b^2=9,\\ c^2+d^2=16,\\ ad+bc\geqslant 12\end{cases}$$
найдите такие, при которых выражение $b+d$ принимает наименьшее значение.

26.37. а) Найдите наименьшее из значений, которые принимает выражение $x+5y$, если x, y положительны и удовлетворяют неравенству $x^2-6xy+y^2+21\leqslant 0$.
б) Найдите наибольшее из значений, которые принимает выражение $x+3y$, если x, y удовлетворяют неравенству $x^2+xy+4y^2\leqslant 3$.
26.38. а) Найдите наибольшее из значений z, для которых существуют числа x, y, удовлетворяющие уравнению $2x^2+2y^2+z^2+xy+xz+yz=4$.
б) Найдите наименьшее из значений x, для которых существуют числа y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2+2y^2+z^2+xy-xz-yz=1$.

26.39. Докажите, что для всех положительных x верно неравенство: а) $x^2+\pi x+4\pi\cos x>0$; б) $x^2+\pi x+\dfrac{15}{2}\pi\sin x>0$.

26.40. Решите уравнение:

а) $(2x+1)\left(2+\sqrt{(2x+1)^2+3}\right)+3x\left(2+\sqrt{9x^2+3}\right)=0$; б) $(4x+1)\left(1+\sqrt{(4x+1)^2+7}\right)+3x\left(1+\sqrt{9x^2+7}\right)=0$.

26.41. а) Числа a, b и c таковы, что $2a^2+b^2+c^2=3$. Какое наименьшее значение может принимать выражение $a-2b+c$?
б) Числа x, y, z таковы, что $x^2+3y^2+z^2=2$. Какое наибольшее значение может принимать выражение $2x+y-z$?
26.42. Найдите все тройки целых чисел (x, y, z), для которых справедливо неравенство:
а) $\dfrac{1}{\sqrt{7+2x-4y+3z}}+\dfrac{3}{\sqrt{2y+2z-5x}}>\dfrac{2}{\sqrt{3x+2y-5z-4}}+x^2+7x+11$;
б) $\log_2(2x+3y-6z+3)+\log_2(3x-5y+2z-2)+\log_2(2y+4z-5x+2)>z^2-9z+17$.

26.43. Найдите наименьшее значение выражения $|x+y|+\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}$.
26.44. Решите уравнение $\log_2(3x+1)\log_5(3x+4)+\log_3(3x+2)\log_4(3x+3)=2\log_3(3x+2)\log_5(3x+4)$.
26.45. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{-3x^3+8x^2+47x-52}=6\sqrt{6x-x^2-5}+$ $+\sqrt{a^2-10a+21}$ имеет единственное решение.
26.46. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{1}{2}+x_1}+\sqrt{\dfrac{1}{2}+x_2}+\ldots+\sqrt{\dfrac{1}{2}+x_{10}}=8,\\ \sqrt{\dfrac{1}{2}-x_1}+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x_2}+\ldots+\sqrt{\dfrac{1}{2}-x_{10}}=6.\end{cases}$$