

Часть 25. Задачи с параметром

- 25.1. а) $(a^2 - 1)x = a + 1$; б) $(a^2 + a - 2)x \geq a^2 - 1$. 25.2. $x^2 + ax + 1 > 0$. 25.3. $x + \sqrt{x} = a$. 25.4. $ax^2 + x + 1 > 0$.
- 25.5. а) $ax > \frac{1}{x}$; б) $(a - 1) \cdot 2^{\sqrt{x}} > a - 3$.
- 25.6. При каких a неравенство $ax^2 - 2ax + 3 > 0$ верно для всех x ?
- 25.7. При каких a один корень уравнения $x^2 - 3ax + 6 = 0$ больше 1, а второй — меньше 1?
- 25.8. При каких a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3?
- 25.9. При каких a оба корня уравнения $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ лежат между корнями уравнения $x^2 - 2(a + 1)x + a(a - 1) = 0$?
- 25.10. При каких a неравенство $x^2 - (a + 2)x + a + 3 > 0$ верно для всех $x > 0$?
- 25.11. При каких a неравенство $(a^2 - 4)x^2 - 4ax + 2 > 0$ верно для всех $x > 2$?
- 25.12. При каких a корни уравнения $x^2 + x + a = 0$ больше a ?
- 25.13. При каких a неравенство $2x^2 - 4a^2x - a^2 + 1 > 0$ верно для всех x , по модулю не превосходящих 1?
- 25.14. При каких a любое x , удовлетворяющее неравенству $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$, по модулю не превосходит 2?
- 25.15. $9^{-|x-2|} - 4 \cdot 3^{-|x-2|} - a = 0$. 25.16. $4^x - 4a \cdot 2^x + 2a + 2 = 0$.
- 25.17. При каких a из неравенства $x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 > 0$?
- 25.18. При каких a из неравенства $x^2 - a(1 + a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 8x - 20 > 0$?
- 25.19. При каких a неравенство $(x + 3 - 2a)(x + 3a - 2) < 0$ верно для всех x таких, что $2 \leq x \leq 3$?
- 25.20. При каких a неравенство $4^x - a \cdot 2^x - a + 3 \leq 0$ имеет хотя бы одно решение?
- 25.21. При каких a неравенство $a \cdot 9^x + 4(a - 1) \cdot 3^x + a > 1$ справедливо для всех x ?
- 25.22. При каких a неравенство $1 + \log_5(x^2 + 1) \geq \log_5(ax^2 + 4x + a)$ справедливо для всех x ?
- 25.23. При каких a неравенство $\log_2\left(2x^2 + 2x + \frac{7}{2}\right) + 1 \geq \log_2(ax^2 + a)$ имеет хотя бы одно решение?
- 25.24. Для каждого a решите систему уравнений: а) $\begin{cases} (a + 2)x - ay = 1 - a, \\ 2x - (3a + 1)y = a + 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5ax - (a + 1)y = a, \\ (9a + 1)x - (a + 3)y = 3a - 1. \end{cases}$
- 25.25. При каких a следующая система имеет единственное решение: а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = a, \\ x - y = a; \end{cases}$ б) $\begin{cases} |x + 2y + 1| \leq 11, \\ (x - a)^2 + (y - 2a)^2 = 2 + a^2 \end{cases}$
- При каких неотрицательных a следующая система имеет ровно два решения: в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + x = a + 2, \\ x + 2y = 1 - a, \\ y \leq -1? \end{cases}$
- 25.26. а) $|x + 3| - a|x - 1| = 4$; б) $a|x + 3| + 2|x + 4| = 2$.
- 25.27. При каких a уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имеют общий корень?
- 25.28. а) При каких a уравнение $(x - a)^2(a(x - a)^2 - a - 1) = -1$ имеет больше положительных корней, чем отрицательных?
б) При каких a уравнение $(x - a)^2((x - a)^2 - 2a - 4) = -2a - 3$ имеет больше отрицательных корней, чем положительных?
- 25.29. При каких a уравнение $\lg(x^2 - 6x + 8)^{\ln 10} = \ln(ax - 17)$ имеет ровно одно решение?
- 25.30. $f(x) = ax^2 + bx + c$ — квадратный трёхчлен. Известно, что $f(-3) < -5$, $f(-1) > 0$, $f(1) < 4$. Определите знак a .
- 25.31. а) При каких a неравенство $3 - |x - a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение?
б) При каких a решения неравенства $\sqrt{5 - x} + \sqrt{x^2 + 2ax + a^2} \leq 3$ образуют отрезок?
в) Для каждого a решите уравнение $\sqrt{1 - x^2} = a - x$. г) Для каждого a решите уравнение $x^2 - \sqrt{a - x} = a$.
д) Для каждого a решите уравнение $\frac{\lg ax}{\lg(x + 2)} = 2$.
- 25.32. При каких a уравнение $x - \frac{a}{2} = 4|4|x| - a^2|$ имеет ровно три корня? Найдите эти корни.
- 25.33. При каких a уравнение $x|x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет единственное решение?
- 25.34. При каких a уравнение имеет ровно два различных решения:
- а) $\sin(\arcsin x) + 4 \cos\left(\arcsin \frac{x}{2}\right) + 2a = 0$; б) $x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$?
- 25.35. При каких a неравенство $9^{\lg x} + 2(a - 2) \cdot 3^{\lg x} + a^2 > 1$ верно для всех x из отрезка $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$?
- 25.36. а) При каких a уравнение $x(x + 1)(x + a)(x + a + 1) = a^2$ имеет ровно четыре корня?
б) При каких a уравнение $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = a$ имеет не менее трёх отрицательных корней?
- 25.37. а) При каких a уравнение $x^4 - ax^3 - (2a + 1)x^2 + ax + 1 = 0$ имеет не менее двух корней, больших 1?
б) При каких a уравнение $x^4 + (a - 1)x^3 + x^2 + (a - 1)x + 1 = 0$ имеет не менее двух различных отрицательных корней?
- 25.38. При каких a следующее уравнение имеет единственное решение:
- а) $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$; б) $a^2x^2 - a \operatorname{tg}(\cos x) + 1 = 0$?
- При каких a следующая система имеет единственное решение:
- в) $\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} z \cos(x - y) + (2 + xy) \sin(x + y) - z = 0, \\ x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = a + 2x, \\ (x + y + a \sin^2 z)((1 - a) \ln(1 - xy) + 1) = 0? \end{cases}$
- 25.39. При каких a и b следующая система имеет единственное решение: а) $\begin{cases} xyz + z = a, \\ xyz^2 + z = b, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \left| \frac{x^y - 1}{x^y + 1} \right| = a, \\ x^2 + y^2 = b, \\ x > 0? \end{cases}$

25.40. При каких a следующая система имеет хотя бы одно решение для любого b :

$$a) \begin{cases} 2^{bx} + (a+1)by^2 = a^2, \\ (a-1)x^3 + y^3 = 1; \end{cases} \quad б) \begin{cases} (x^2+1)^a + (b^2+1)^b = 2, \\ a + bxy + x^2y = 1? \end{cases}$$

25.41. При каких a система имеет единственное решение:

$$a) \begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0, \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \leq a, \\ x^2 - 2x \leq 3 - 6a; \end{cases} \quad в) \begin{cases} (a-1)x^2 + 2ax + a + 4 \leq 0, \\ ax^2 + 2(a+1)x + a + 1 \geq 0? \end{cases}$$

25.42. При каких a решения следующей системы образуют на числовой оси отрезок длины 1:

$$a) \begin{cases} x^2 + 6x + 7 + a \leq 0, \\ x^2 + 4x + 7 \leq 4a; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 - 2x \leq a - 1, \\ x^2 - 4x \leq 1 - 4a? \end{cases}$$

25.43. Найдите все a , для которых следующая система имеет ровно два решения:

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0. \end{cases}$$

25.44. Найдите все a , для которых следующая система имеет ровно одно решение:

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0. \end{cases}$$

25.45. Найдите все a , для которых следующая система имеет решения:

$$a) \begin{cases} x^2 + 2xy - 7y^2 \geq \frac{1-a}{a+1}, \\ 3x^2 + 10xy - 5y^2 \leq -2; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \geq 3, \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \leq \frac{2a-1}{2a+5}. \end{cases}$$

25.46. Найдите все a , для которых следующие уравнения равносильны:

$$a) \sin 3x = a \sin x + (4-2|a|) \sin^2 x \quad \text{и} \quad \sin 3x + \cos 2x = 1 + 2 \sin x \cos 2x;$$

$$б) 2 \sin^7 x - (1-a) \sin^3 x + (2a^3 - 2a - 1) \sin x = 0 \quad \text{и} \quad 2 \sin^6 x + \cos 2x = 1 + a - 2a^3 + a \cos^2 x.$$

25.47. Для каждого неотрицательного значения a решите неравенство:

$$a) 16a^3x^4 + 8a^2x^2 + 16x + a + 4 \geq 0; \quad б) a^3x^4 + 2a^2x^2 - 8x + a + 4 \geq 0.$$

25.48. Найдите все значения параметра α из интервала $(2; 5)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[2; 3]$, удовлетворяющее уравнению $\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$.

25.49. Найдите все значения параметра α из интервала $(5; 16)$, при каждом из которых существует хотя бы одно число x из отрезка $[1; 2]$, удовлетворяющее уравнению $1 + \cos^2\left(\frac{\alpha x}{2} + \frac{3\pi}{8}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$.

25.50. Найдите все пары значений a и b , для которых следующая система имеет не менее пяти решений (x, y) :

$$a) \begin{cases} x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a, \\ x^2 + y^2 + bxy - 1 = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} bx(2x-y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1, \\ 4x^2 + y^2 + axy - 1 = 0. \end{cases}$$

25.51. Найдите все a , для которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$a) \begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8, \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105}; \end{cases} \quad б) \begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 4, \\ 2x^2 - 2xy + 10y^2 = a^4 - 6a^3 + 9a^2 - 19 + \sqrt{85}. \end{cases}$$

25.52. Найдите все a , для которых следующая система уравнений имеет хотя бы одно решение:

$$a) \begin{cases} 9x^2 - 6xy + y^2 + 6x - 13y + 3 = 0, \\ 13x^2 + 6xy + 10y^2 + 16x + 2y - 4ax - 6ay + a^2 - 2a + 3 = 0; \end{cases} \quad б) \begin{cases} 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 2x - 6y = 0, \\ 5x^2 - 16xy + 13y^2 - 6x + 10y + 2ax - 4ay + a^2 - 2a - 5 = 0. \end{cases}$$

25.53. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее неравенство имеет ровно одно решение:

$$\log_{\frac{1}{a}}\left(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1\right) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0.$$

25.54. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее уравнение имеет ровно три решения: $4^{-|x-a|} \cdot \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+2x} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(2|x-a| + 2) = 0$.

25.55. а) Найдите все значения a , при каждом из которых число решений уравнения $3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$ не превосходит числа решений уравнения $x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x = (8^a - 4) \log_3\left(3^a - \frac{1}{2}\right) - 3x^3$.

б) Найдите все значения a , при каждом из которых число решений уравнения $2x^3 + 6x = (3^{6a} - 9) \cdot \sqrt{2^{8a} - \frac{1}{6}} - (3a - 1)^2 \cdot 12^x$ не меньше числа решений уравнения $3(5x^2 - a^4) - 2x = 2a^2(6x - 1)$.

25.56. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|a - 2| \left(\left(\frac{1}{3} \right)^{x^2 - 2ax + 4a - 6} - 8 \right) = |x - a|$ имеет на отрезке $[1; 4]$ ровно два корня.

25.57. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее неравенство выполняется для любого положительного x : а) $(a^3 + (1 - \sqrt{2})a^2 - (3 + \sqrt{2})a + 3\sqrt{2})x^2 + 2(a^2 - 2)x + a > -\sqrt{2}$;

$$б) (a^3 + (1 - \sqrt{3})a^2 - (4 + \sqrt{3})a + 4\sqrt{3})x^2 + 2(a^2 - 3)x + a > -\sqrt{3}.$$

25.58. Найдите все значения a , при каждом из которых следующая система имеет хотя бы одно решение:

$$\text{а) } \begin{cases} \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 5 \right| - \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} - 7 \right| + \left| 24\sqrt{\cos \frac{\pi y}{2}} + 13 \right| = 11 - \sqrt{\sin \frac{\pi(x-2y-1)}{3}}, \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{3}{4}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \left| 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} - 5 \right| - \left| 1 - 6\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} \right| + \left| 12\sqrt{\cos \frac{\pi y}{4}} + 1 \right| = 5 - \sin^2 \frac{\pi(y-2x)}{12}, \\ 10 - 9(x^2 + (y-a)^2) = 3\sqrt{x^2 + (y-a)^2} - \frac{8}{9}. \end{cases}$$

25.59. Найдите все значения a , при каждом из которых следующие системы равносильны:

$$\text{а) } \begin{cases} x+2y=2-a, \\ -x+ay=a-2a^2 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2-y^4-4x+3=0, \\ 2x^2+y^2+(a^2+2a-11)x+12-6a=0; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} ax+3y=6a-4, \\ x+y=2a \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2-2y^2-6x+8=0, \\ x^2+y^2-(2a+4)x+2(a^2+a+2)=0. \end{cases}$$

25.60. Найдите все значения a , для которых следующая система уравнений имеет единственное решение:

$$\text{а) } \begin{cases} axy + x - y + \frac{3}{2} = 0, \\ x + 2y + xy + 1 = 0; \end{cases} \text{ б) } \begin{cases} 3y + 2 + xy = 0, \\ x(y + 1 - a) + y(2a - 3) + a + 3 = 0. \end{cases}$$

25.61. а) Найдите все значения p , при каждом из которых множество решений неравенства $(p-x^2)(p+x-2) < 0$ не содержит ни одного решения неравенства $x^2 \leq 1$.

б) Для каждого a определите число решений уравнения $|x^2 + a| = |a^2 + x|$.

в) Для каждого a решите систему неравенств $\begin{cases} x^2 - x - 2 + a \leq 0, \\ x^2 - 2x - 3 + 2a > 0. \end{cases}$

г) Для каждого a решите неравенство $\log_{x-3}(2x-a) < 1$.

25.62. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее уравнение имеет хотя бы один корень: $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$.

25.63. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее уравнение не имеет ни одного корня: $||x - a| + 2x| + 4x = 8|x + 1|$.

25.64. Найдите все значения параметра a , для которых уравнение $\sqrt{3} \sin(2^{-x^2+2x}) = a - 2 \cos^2(2^{-x^2+2x-1})$ имеет хотя бы одно решение.

25.65. Найдите все значения a , при каждом из которых сумма длин интервалов, составляющих решение неравенства $\frac{x^2 + (2a^2 + 6)x - a^2 + 2a - 3}{x^2 + (a^2 + 7a - 7)x - a^2 + 2a - 3} < 0$, не меньше 1.

25.66. Найдите все значения a , при которых система

$$\begin{cases} 3x^3 + 7x^2 + 6x + a = y, \\ 3y^3 + 7y^2 + 6y + a = z, \\ 3z^3 + 7z^2 + 6z + a = x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.