

Часть 22. Логарифмические уравнения и неравенства

- 22.1. Вычислите: а) $-\log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt{25 \frac{1}{\log_6 5} + 49 \frac{1}{\log_8 7}}$; в) $\frac{\left(27 \frac{1}{\log_2 3} + 5 \log_{25} 49\right) \left(81 \frac{1}{\log_4 9} - 8 \log_4 9\right)}{3 + 5 \frac{1}{\log_{16} 25} \cdot 5 \log_5 3}$;
 г) $\frac{81 \frac{1}{\log_9 9} + 3 \frac{3}{\log_{\sqrt{6}} 3}}{409} \cdot \left(\sqrt{7} \frac{2}{\log_{25} 7} - 125 \log_{25} 6\right)$; д) $\frac{\log_3 24}{\log_{72} 3} - \frac{\log_3 216}{\log_8 3}$; е) $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{10} 9 \cdot \log_{11} 10$;
 ж) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$; з) $\log_2(\sin 1^\circ \cdot \sin 3^\circ \cdot \dots \cdot \sin 89^\circ)$; и) $2^{\log_3 5} - 5^{\log_3 2}$; к) $2^{\sqrt{\log_2 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 2}}$; л) $\frac{40 \sqrt[3]{\log_{40} 8}}{8 \sqrt[3]{\log_8^2 40 - \frac{1}{3}}}$.

22.2. а) Дано: $\lg 5 = a$, $\lg 3 = b$. Найдите $\log_{30} 8$. б) Дано: $\lg 2 = a$, $\log_2 7 = b$. Найдите $\lg 56$.

в) Дано: $\log_6 15 = a$, $\log_{12} 18 = b$. Найдите $\log_{25} 24$.

г) Дано: $\log_b a = \sqrt{3}$. Найдите $\log_{b^3 \sqrt{a^3}} \frac{\sqrt[7]{a}}{b \sqrt{b}}$. д) Дано: $\log_y x = a$, $\log_z x = b$. Найдите $\log_{\sqrt[3]{xyz}} \left(\frac{yz}{x^3}\right)^2$.

е) Известно, что для некоторой тройки чисел x, y, z ($x \neq y$) выражения $\log_{x^5 y^2 z} \frac{\sqrt[3]{x^2 y}}{z}$ и $\log_{x^2 y^5 z} \frac{\sqrt{xy}}{z}$ равны одному и тому же числу. Найдите это число.

22.3. Найдите области определения следующих функций:

а) $f(x) = \lg(x^2 - 5x + 6)$; б) $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x+3}$; в) $f(x) = \log_2(x-2) - \log_2(x+3)$; г) $f(x) = \log_5(x^2 - x - 2)$;

д) $f(x) = \log_2(x-2) + \log_2(x+1)$; е) $f(x) = \lg(x^2 + x + 2)$; ж) $f(x) = \lg \frac{x^4 - 10x^2 + 9}{7-x}$; з) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x + 4)$.

22.4. Сравните числа: а) $\log_{\frac{1}{3}} 5$ и $\log_{\frac{1}{3}} 7$; б) $\log_2 7,3$ и $\log_2 7,5$; в) $\log_3 \frac{1}{5}$ и $\log_3 \frac{1}{6}$; г) $\log \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{7}$ и $\log \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{9}$;

д) $\log_2 7$ и $\log_3 7$; е) $2 \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$ и $3 \log_8 26$; ж) $\log_5 \frac{1}{3}$ и $\log_7 \frac{1}{3}$; з) $\log_2 5$ и 2 ; и) $\log_2 5$ и $\frac{5}{2}$; к) $\log_2 20$ и $\log_3 80$;

л) $\log_5 130$ и $\log_3 25$; м) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$; н) $\log_2 3$ и $\log_3 4$; о) $\log_9 10$ и $\log_{10} 11$; п) $\log_3 4$ и $\sqrt[4]{2}$.

22.5. Решите неравенства: а) $\log_{\frac{1}{3}}(x+5) < -2$; б) $\log_2(x-3) < 1$; в) $\log_5(2x+1) \geq 0$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x-2) \geq -1$;

д) $\log_2 \frac{x-2}{x+5} \leq 1$; е) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{x+4} < 1$; ж) $\log_2(x^2 + x + 4) \leq 2$; з) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$; и) $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leq 1$;

к) $\log_{0,3}(x^2 - 5x + 7) > 0$; л) $\log_{\pi}(x+27) - \log_{\pi}(16-2x) < \log_{\pi} x$; м) $\log_{0,3}(3x-8) > \log_{0,3}(x^2+4)$;

н) $2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$; о) $5^{\log_5 \frac{x-2}{x}} < 1$; п) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$; р) $\log_2(1 + \log_{\frac{1}{9}} x - \log_9 x) < 1$;

с) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{0,25}(x^2-5x+8)} \leq 2,5$; т) $0,3^{\log_{\frac{1}{3}} \log_2 \frac{3x+6}{x^2+2}} > 1$; у) $\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x - 2 \leq 0$; ф) $\frac{3x^2 - 16x + 21}{\log_{0,3}(x^2+4)} < 0$;

х) $\log_2(x^2-4) - 3 \log_2 \frac{x+2}{x-2} > 2$; ц) $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(6^{x+1} - 36^x) \geq -2$; ч) $\sqrt{\log_3(9x+18)} \leq \log_3(x+2)$;

ш) $\sqrt{\log_9(3x^2-4x+2)+1} > \log_3(3x^2-4x+2)$; щ) $\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \leq 1$; э) $\frac{\log_5(x^2-4x-11)^2 - \log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2} \geq 0$.

22.6. Решите уравнения: а) $\lg 5 + \lg(x+10) = 1 - \lg(2x-1) + \lg(21x-20)$; б) $\lg(x+1,5) = -\lg x$;

в) $\log_5 \sqrt{x-9} - \log_5 10 + \log_5 \sqrt{2x-1} = 0$; г) $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$;

д) $x(\lg 5 - 1) = \lg(2^x + 1) - \lg 6$; е) $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$; ж) $\log_2(4 \cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$;

з) $\lg(3x^2 + 12x + 19) - \lg(3x + 4) = 1$; и) $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\log_{10}(3-x)}$; к) $x^{\lg x} = 5 \cdot 2^{\lg x^2 - 1}$; л) $\lg^2(100x) + \lg^2(10x) = 14 + \lg \frac{1}{x}$;

м) $1 + \log_x(4-x) = \log_5 3 \cdot \log_x 5$; н) $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2) + \log_{2x+3}(6x^2+23x+21) = 4$;

о) $7^{\lg x} - 5^{\lg x+1} = 3 \cdot 5^{\lg x-1} - 13 \cdot 7^{\lg x-1}$; п) $25^{\lg x} = 5 + 4x^{\lg 5}$; р) $x^{\lg 9} + 3^{\lg x} = 12$; с) $\log_x(2^{\lg x} - 9 \lg^3 x + 81 \lg x) = \lg 2$;

т) $16^{\frac{x-1}{x}} \cdot 5^x = 100$; у) $4^x \cdot 3^{\frac{x}{x-1}} = 144$; ф) $\frac{x}{40} = 5^{\log_x 200}$; х) $\log_{\frac{2}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}}(x^2+4x-2) = \log_{\frac{1}{2-\sqrt{3}}}(x^2+4x-3)$.

22.7. Решите системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4, \\ \log_4(x+y) = \frac{3}{2}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \lg 5 \cdot \lg \frac{5}{x} = \lg 7 \cdot \lg \frac{7}{y}, \\ \lg x \cdot \lg 7 = \lg y \cdot \lg 5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \lg^2 x = \lg^2 y + \lg^2 xy, \\ \lg^2(x-y) + \lg x \cdot \lg y = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \log_{\frac{2}{3}} x + \log_{\frac{2}{3}} y - \log_{\frac{2}{3}}(x+y) = 1, \\ \log_{\frac{3}{2}} x \cdot \log_{\frac{3}{2}} y + \log_{\frac{3}{2}}(x+y) = 0. \end{cases}$$

22.8. а) Найдите сумму корней уравнения $\frac{x+1}{2} = \log_2(2^x+3) - \log_4(1978-2^{-x})$.

б) Найдите произведение корней уравнения $(3x)^{3 \log_6 2x-4} = 1978 \cdot x^{\log_6 x}$.