Часть 19. Обратные тригонометрические функции

Определение. Арксинусом a называется число, которое принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, и синус которого равен a, т. е. 1) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin a \leqslant \frac{\pi}{2}$, 2) $\sin(\arcsin a) = a$.

19.1. Найдите: а) $\arcsin\frac{1}{2}$; б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\arcsin 1$; г) $\arcsin(-1)$; д) $\arcsin 0$; е) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; з) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Теорема. Для любого числа a, по модулю не превосходящего 1, существует единственный арксинус.
Теорема. Если $|a| \leqslant 1$, то

$$\sin x = a \iff \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \iff x = (-1)^n \arcsin a + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Определение. Арккосинусом a называется число, которое принадлежит отрезку $[0; \pi]$, и косинус которого равен a, т. е. 1) $0 \leqslant \arccos a \leqslant \pi$, 2) $\cos(\arccos a) = a$.

19.2. Найдите: а) $\arccos\frac{1}{2}$; б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; в) $\arccos 1$; г) $\arccos(-1)$; д) $\arccos 0$; е) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; з) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; и) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Теорема. Для любого числа a, по модулю не превосходящего 1, существует единственный арккосинус.
Теорема. Если $|a| \leqslant 1$, то

$$\cos x = a \iff \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}), \\ x = -\arccos a + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}\right. \iff x = \pm\arccos a + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Определение. Арктангенсом a называется число, которое принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, и тангенс которого равен a, т. е. 1) $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} a < \frac{\pi}{2}$, 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a$.

19.3. Найдите: а) $\operatorname{arctg} 1$; б) $\operatorname{arctg}(-1)$; в) $\operatorname{arctg} 0$; г) $\operatorname{arctg}\sqrt{3}$; д) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; е) $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Определение. Арккотангенсом a называется число, которое принадлежит интервалу $(0; \pi)$, и котангенс которого равен a, т. е. 1) $0 < \operatorname{arcctg} a < \pi$, 2) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a$.

19.4. Найдите: а) $\operatorname{arcctg} 1$; б) $\operatorname{arcctg}(-1)$; в) $\operatorname{arcctg} 0$; г) $\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$; д) $\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3})$; е) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$; ж) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Теорема. Для любого числа a существуют единственный арктангенс и единственный арккотангенс.
Теорема. Для любого числа a

$\operatorname{tg} x = a \iff x = \operatorname{arctg} a + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$;
$\operatorname{ctg} x = a \iff x = \operatorname{arcctg} a + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$.

19.5. Найдите: а) $\sin(\arccos a)$; б) $\cos(\arcsin a)$; в) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)$; г) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)$; д) $\operatorname{tg}(\arcsin a)$; е) $\operatorname{tg}(\arccos a)$; ж) $\operatorname{ctg}(\arccos a)$; з) $\operatorname{ctg}(\arcsin a)$; и) $\cos(\operatorname{arctg} a)$; к) $\sin(\operatorname{arctg} a)$; л) $\sin(\operatorname{arcctg} a)$; м) $\cos(\operatorname{arcctg} a)$.

19.6. Какие значения могут принимать величины a и b, если: а) $b = \frac{1}{2}\arcsin a$; б) $b = 3\arccos(2a)$; в) $b = \operatorname{arctg}(5a)$; г) $b = \frac{3}{4}\operatorname{arcctg} a - 1$?

19.7. Вычислите: а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos 0{,}6\right)$; б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin(-0{,}8)\right)$; в) $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} - \arcsin\left(-\frac{5}{13}\right)\right)$; г) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4} - \frac{3\pi}{2}\right)$; д) $\cos(\arcsin(\sqrt{3} - \sqrt{2}))$; е) $\cos\left(\arcsin\frac{\pi}{3}\right)$.

19.8. Вычислите: а) $\operatorname{tg}\left(5\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; б) $\sin\left(3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 2\arccos\frac{1}{2}\right)$; в) $\sin\left(\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$; г) $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\right)$; д) $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{4}{7}\right)\right)$.

19.9. Докажите равенства: а) $\arccos\sqrt{\dfrac{2}{3}} - \arccos\dfrac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$; б) $\arcsin\dfrac{4}{5} + \arcsin\dfrac{5}{13} + \arcsin\dfrac{16}{65} = \dfrac{\pi}{2}$; в) $\arccos\dfrac{1}{2} + \arccos\left(-\dfrac{1}{7}\right) = \arccos\left(-\dfrac{13}{14}\right)$; г) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} = \operatorname{arctg}\dfrac{32}{43}$; д) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{8} = \dfrac{\pi}{4}$.

19.10. Сравните числа: а) $\arccos(-0{,}3)$ и $\arccos(-0{,}2)$; б) $\arcsin\dfrac{1}{5}$ и $\arcsin\dfrac{1}{6}$; в) $\arccos\dfrac{2}{3}$ и $\arcsin\dfrac{1}{3}$; г) $\arccos\left(-\dfrac{4}{5}\right)$ и $\arcsin\left(-\dfrac{5}{6}\right)$; д) $\cos 40^\circ$ и $\dfrac{4}{5}$.

19.11. Найдите: а) $\arcsin\left(\sin\dfrac{3}{2}\right)$; б) $\arccos(\cos 3)$; в) $\arcsin(\sin 2)$; г) $\arccos(\cos 10)$; д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 4)$; е) $\arcsin(\sin 6)$; ж) $\operatorname{arctg} 8 + \operatorname{arctg}\dfrac{19}{22} + \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.

19.12. Докажите тождества: а) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$; в) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$; г) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

19.13. Докажите равенства: а) $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \dfrac{3\pi}{4}$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7} = \dfrac{\pi}{4}$; в) $\arcsin 0{,}6 + \arcsin 0{,}8 = \dfrac{\pi}{2}$; г) $\arccos\dfrac{5}{13} - \arccos\dfrac{12}{13} = \arccos\dfrac{120}{169}$.

19.14. Постройте графики функций: а) $y = \arcsin x$; б) $y = \arccos x$; в) $y = \operatorname{arctg} x$; г) $y = \operatorname{arcctg} x$; д) $y = \sin(\arcsin x)$; е) $y = \cos(\arccos x)$; ж) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$; з) $y = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$; и) $y = \arcsin(\sin x)$; к) $y = \arccos(\cos x)$; л) $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$; м) $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$; н) $y = \arccos(\sin x)$.

19.15. Решите уравнения: а) $\arcsin(x^2 - 2x + 2) = \dfrac{\pi x}{2}$; б) $4\operatorname{arctg}(x^2 - 3x - 2) - \pi = 0$; в) $\operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg}(x+1) = \dfrac{\pi}{4}$; г) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arctg} x = \dfrac{\pi}{4}$; д) $\arcsin\dfrac{2}{3\sqrt{x}} - \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\dfrac{1}{3}$; е) $\arcsin 3x = \arccos 4x$; ж) $\operatorname{arctg} 3x = \arccos 8x$; з) $2\arcsin x = \arcsin\dfrac{10x}{13}$; и) $\sqrt{4x^2 + 4x + 3}\cdot\operatorname{arctg}(2x+1) + \sqrt{x^2 - 4x + 6}\cdot\operatorname{arctg}(2-x) = 0$; к) $\arccos(\sin 2x) = 3x + \dfrac{\pi}{3}$; л) $\arcsin\left(\cos\left(3x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right) = 2x$; м) $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 4\pi x\right)\right) = \pi - \arcsin\left(\sin\left(2\pi x + \dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

19.16. Найдите наибольшее значение функции $y = \operatorname{arctg}(\cos x) + \operatorname{arctg}(\cos 2x)$.

19.17. Решите неравенства: а) $\arccos 3x + \arcsin(x+1) \leqslant \dfrac{7\pi}{6}$; б) $\sin x \arccos x + x\cos x > 0$.

19.18. Найдите все значения k, при которых хотя бы одна общая точка графиков функций $y = \dfrac{2}{5} - \arcsin x$ и $y = \dfrac{2}{5} - 2\operatorname{arctg} kx$ имеет отрицательную ординату.