Часть 18. Проверка в тригонометрических уравнениях

Решите уравнения (18.1 — 18.20):

18.1. а) $\cos x=\dfrac{1}{2}$ на отрезке $[0;\,2\pi]$; б) $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{\pi}{2}\right]$; в) $\operatorname{tg} x=1$ на отрезке $[0;\,\pi]$; г) $\operatorname{ctg} x=-\sqrt{3}$ на отрезке $[0;\,2\pi]$; д) $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $\left[0;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$; е) $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[-\pi;\,\pi]$; ж) $\sin x=\dfrac{1}{5}$ на отрезке $[-2\pi;\,0]$; з) $\operatorname{tg} x=-1$ на отрезке $[-\pi;\,\pi]$; и) $\operatorname{tg} x=3$ на отрезке $[-2\pi;\,0]$; к) $\operatorname{ctg} x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ на отрезке $[2\pi;\,4\pi]$; л) $\cos x=-\dfrac{2}{3}$ на отрезке $\left[0;\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$; м) $\sin x=\dfrac{1}{2}$ на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2};\,\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

18.2. а) $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ на интервале $(2;\,5)$; б) $\sin x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $[4;\,6]$; в) $\operatorname{tg} x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ на отрезке $[3{,}5;\,4{,}5]$; г) $\operatorname{ctg} x=-1$ на отрезке $[-4{,}5;\,-3{,}5]$.

18.3. а) $\operatorname{tg} 2x=-1$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$; б) $\cos\dfrac{x}{2}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ на отрезке $[\pi;\,3\pi]$.

18.4. а) $\sin 3x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ на отрезке $\left[-\dfrac{\pi}{6};\,\dfrac{\pi}{6}\right]$; б) $\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$ на интервале $(-\pi;\,0)$; в) $\operatorname{ctg}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)=1$ на отрезке $[-\pi;\,0]$; г) $\sin 3x=\dfrac{2}{3}$ на интервале $\left(\dfrac{\pi}{12};\,\dfrac{\pi}{3}\right)$.

18.5. а) $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos x}$; б) $\sqrt{2\sin x-1}=\sqrt{\cos x}$. **18.6.** $\sin 2x+\cos x+2\sin x=-1$ на интервале $(0;\,5)$.
18.7. $\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x-\cos^2 x=-2$ на интервале $(0;\,4)$.

18.8. а) $\sqrt{2\sin 2x}+2\sin x=0$; б) $\sqrt{1+\cos x}=\sin x$; в) $\sqrt{\dfrac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\dfrac{3}{4}-\cos 3x}$.

18.9. а) $\sqrt{3+4\sqrt{6}-(16\sqrt{3}-8\sqrt{2})\cos x}=4\cos x-\sqrt{3}$; б) $\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}$.

18.10. а) $\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2}$ на интервале $\left(0{,}4\pi;\,\dfrac{6}{7}\pi\right)$;

б) $\sqrt{2}\cos 8x+\sqrt{2}\sin 8x=-1$ на интервале $\left(\dfrac{3}{8}\pi;\,0{,}7\pi\right)$. **18.11.** $\sqrt{\sin(1-x)}=\sqrt{\cos x}$ на отрезке $[0;\,2\pi]$.

18.12. $\sqrt{\sin x}=\sqrt{\cos(2+x)}$ на отрезке $[0;\,2\pi]$. **18.13.** $4|\sin x|+2\cos 2x=3$. **18.14.** $1+2\,|\cos x|\sin x=0$.
18.15. а) $\sqrt{17-7\sin 2x}=3\cos x-5\sin x$; б) $\sqrt{5+\cos 2x}=\sin x+3\cos x$.

18.16. а) $\sqrt{\sin 3x+\cos x-\sin x}=\sqrt{\cos x-\sin 2x}$; б) $\sqrt{-\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\sin 2x-\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

18.17. $\sqrt{4-x^2}\,(\sin 2\pi x-3\cos\pi x)=0$. **18.18.** $\sqrt{25-4x^2}\,(3\sin 2\pi x+8\sin\pi x)=0$.

18.19. а) $6\sin x-\dfrac{1}{6}=\sqrt{34\sin x-\dfrac{35}{36}}$; б) $6\cos x-\dfrac{1}{3}=\sqrt{32\cos x-\dfrac{17}{9}}$.

18.20. $5\cos 2x+7\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)+1=0$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

18.21. Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\sqrt{3}=0$.

18.22. а) Найдите все корни уравнения $(1+\operatorname{tg}^2 x)\sin x-\operatorname{tg}^2 x+1=0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{tg} x<0$.
б) Найдите все корни уравнения $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие условию $\operatorname{tg} x>0$.

Решите уравнения (18.23 — 18.31):

18.23. $\sqrt{\sin x}=\sqrt{1-2\sin^2 x}$. **18.24.** $\sqrt{-\cos x}=\sqrt{-1+2\sin^2 x}$. **18.25.** $2\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x$ на интервале $(-5;\,-3)$.
18.26. $\sqrt{2}\cos^2 x=\cos x$ на интервале $(-6;\,-4)$. **18.27.** а) $(2+3\cos 2x)(\sqrt{2\cos 2x+3\sin x+3}-2\sin x+1)=0$; б) $(\sqrt{5-3\cos 2x-8\sin x}+4\sin x+1)(1+4\cos 2x)=0$. **18.28.** $(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$.

18.29. $(1+2\cos x)\sqrt{\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=0$. **18.30.** $\sqrt{\dfrac{3}{\sqrt{2}}\cos x-1}+\sin x=0$. **18.31.** $\sqrt{2}\cos x=\sqrt{-3\sqrt{3}\sin x-4}$.

18.32. Найдите все корни уравнения $\sin 4x+2\cos^2 x=1$, удовлетворяющие условию $|x|<1$.

Решите уравнения (18.33 — 18.47):

18.33. а) $\dfrac{|\sin x|}{\sin x}=1-\cos 2x$ на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$; б) $\dfrac{|\cos x|}{\cos x}=\sin 2x-1$ на отрезке $[0;\,\pi]$.

18.34. а) $\operatorname{tg}(4\sin x)=\sqrt{3}$ на интервале $\left(\dfrac{\pi}{2};\,\dfrac{3\pi}{2}\right)$; б) $\operatorname{ctg}(3\cos x)=1$ на интервале $(0;\,2\pi)$.

18.35. а) $\left|\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{5}\right|=5\cos x+1$; б) $\left|\cos^2\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{3}\right|=3\cos x+1$.

18.36. $\sqrt{10}\cos x-\sqrt{4\cos x-\cos 2x}=0$. **18.37.** $\sqrt{\sin 2x-2\cos 2x}=\sqrt{2}\sin x$. **18.38.** $\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\sin x=|\cos x|$.

18.39. а) $|\sin x+\sin 2x|=||\sin x|-|\sin 2x||$ на интервале $(-2\pi;\ 2\pi)$;
б) $|\sin 2x+\cos x|=||\sin 2x|-|\cos x||$ на интервале $(-2\pi;\ 2\pi)$.

18.40. а) $\sin x-2\sin 2x+\sin 3x=|1-2\cos x+\cos 2x|$; б) $|\cos x+2\sin 2x-\cos 3x|=1+2\sin x-\cos 2x$.

18.41. а) $|\sin^3 x|+13\cos^3 x=\cos x$; б) $24|\cos^3 x|-2\sin^3 x+\sin x=0$.

18.42. а) $2\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{1+8\sin 2x\cos^2 2x}$; б) $\sqrt{\dfrac{1-4\cos^2 3x}{8\cos\left(2x-\dfrac{2\pi}{3}\right)}}=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

18.43. а) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}\cos x\right)=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin x\right)$; б) $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg} x)=\operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg} x)$.

18.44. $\sqrt{3}\sin 2x-2\cos^2 x=2\sqrt{2+2\cos 2x}$. **18.45.** $2\operatorname{tg} x-4\operatorname{ctg} x=\sqrt{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-2+\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}}$.

18.46. а) $\cos x\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{7}{8}\sin x-2\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{16}=0$ на отрезке $\left[-\dfrac{5}{2}\pi;\ \dfrac{1}{2}\pi\right]$;
б) $\cos x\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{9}{10}\sin x-2\cos\dfrac{x}{4}\cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{4}-\dfrac{9}{20}=0$ на отрезке $\left[-\dfrac{3}{2}\pi;\ \dfrac{3}{2}\pi\right]$.

18.47. а) $\operatorname{tg} 2x\operatorname{tg} 7x=1$; б) $\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\dfrac{1}{16}$.

18.48. Найдите сумму корней уравнения $\cos 2x+\operatorname{tg}^2 x=\dfrac{1-3\cos^3 x}{\cos^2 x}$, принадлежащих промежутку $1\leqslant x\leqslant 50$.

18.48. Сколько корней на отрезке $[0;\ 1]$ имеет уравнение $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$?

18.49. Функция $y=f(t)$ такова, что сумма корней уравнения $f(\sin x)=0$ на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2};\ 2\pi\right]$ равна 33π, а сумма корней уравнения $f(\cos x)=0$ на отрезке $\left[\pi;\ \dfrac{3\pi}{2}\right]$ равна 23π. Какова сумма корней второго уравнения на отрезке $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$?

Решите системы (18.50 — 18.60):

18.50. $\begin{cases}\sqrt{\cos 2x}\cos x=0,\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\dfrac{\pi}{3}\right)=0.\end{cases}$ **18.51.** $\begin{cases}\sin y\cos x+\sin x=0,\\ 2\cos^2 y+\sin y\sin x=\cos 2y\cos x.\end{cases}$ **18.52.** $\begin{cases}z=\dfrac{2x}{1-x^2},\\ x=\dfrac{2y}{1-y^2},\\ y=\dfrac{2z}{1-z^2}.\end{cases}$

18.53. $\begin{cases}\sqrt{1+\sin x\sin y}=\cos x,\\ 2\sin x\operatorname{ctg} y+1=0.\end{cases}$ **18.54.** $\begin{cases}\sin(x-2y)=0,\\ \cos(x-y)=1,\\ -\pi\leqslant x\leqslant\pi,\\ \pi\leqslant y\leqslant 2\pi.\end{cases}$ **18.55.** $\begin{cases}\cos^2(x+y)+2\sin(x+y)=\dfrac{7}{4},\\ \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12},\\ 0<x<2\pi,\\ 0\leqslant y\leqslant\pi.\end{cases}$

18.56. $\begin{cases}\left|\sin\left(3x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\sin y-\cos y,\\ \sin 2y+2\sin 2x=\dfrac{3}{4}+2\sin^3 2x.\end{cases}$ **18.57.** $\begin{cases}9\sin^2 x-5\sin x\sin 2x+17\cos x-11=0,\\ 5\cos^3 x-3\sin^2 x+8\cos x-1=0.\end{cases}$

18.58. $\begin{cases}4\sin x-2\sin y=3,\\ 2\cos x-\cos y=0.\end{cases}$ **18.59.** $\begin{cases}2\sin 3x+2\cos 4x=1+\sqrt{2},\\ 2\sin 7x-2\sin x=\sqrt{2},\\ 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$ **18.60.** $\begin{cases}\cos 11x=\cos x,\\ \sin x-\cos 4x=1,\\ |x|<3.\end{cases}$

Решите неравенства (18.61 — 18.70):

18.61. $\sin x>|\cos x|$. **18.62.** $\sin^2 x\leqslant\cos^2 x$. **18.63.** $\sin x\cdot\sin|x|\geqslant-\dfrac{1}{2}$. **18.64.** $2\operatorname{tg} 2x\leqslant 3\operatorname{tg} x$.

18.65. $\sqrt{5-2\sin x}\geqslant 6\sin x-1$. **18.66.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos 2x)\geqslant\sin x\,(1+|1-\sqrt{2}\sin x|)$. **18.67.** $5+2\cos 2x\leqslant 3\,|2\sin x-1|$.

18.68. $1-\dfrac{\cos x}{4\cos^2 x-3}<\dfrac{1}{3-4\cos^2 x}$ на интервале $(0;\ \pi)$.

18.69. а) $\sqrt{6-10\cos x-\sin x}<\sin x-\cos x$ на отрезке $[-\pi;\ \pi]$;
б) $\sqrt{6\cos x-\sin x+4}<\sin x+\cos x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.

18.70. $\sin x\leqslant\sin 2x\leqslant\sin 3x\leqslant\sin 4x\leqslant\sin 5x$ на отрезке $[0;\ 2\pi]$.