Часть 15. Определение тригонометрических функций. Основные тождества

15.1. Сравните числа:

а) $\sin 1{,}8$ и $\sin 3{,}6$; б) $\sin \dfrac{2\pi}{3}$ и $\cos \dfrac{3\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg} 1{,}4$ и $\operatorname{tg} 2$; г) $\operatorname{ctg} 2{,}75$ и $\operatorname{ctg} 3{,}75$; д) $\sin 1{,}2$ и $\sin 1{,}3$;

е) $\cos 2{,}3$ и $\cos 2{,}4$; ж) $\sin 2{,}5$ и $\sin 2{,}6$; з) $\cos 3{,}5$ и $\cos 4{,}5$; и) $\cos \dfrac{\pi}{11}$ и $\sin \dfrac{\pi}{11}$; к) $\sin 16^\circ$ и $\cos 375^\circ$;

л) $\cos 5{,}8$ и $\cos 6{,}4$.

15.2. Упростите выражения:

а) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}+\cos^2\alpha$; в) $\dfrac{\cos\beta}{1+\sin\beta}+\operatorname{tg}\beta$; г) $\dfrac{\sin^3\gamma+\cos^3\gamma}{\sin\gamma+\cos\gamma}+\sin\gamma\cos\gamma$; д) $\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}$;

е) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha$; ж) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}^2\gamma}{1+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}^2\gamma}$; з) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta}$; и) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)$;

к) $\dfrac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}{\operatorname{ctg}\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}$; л) $\sin^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha$; м) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$;

н) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}$; о) $\left(\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\right)$; п) $\dfrac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}$.

15.3. Докажите тождества:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}^6\alpha$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\beta}=\sin^2\beta$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta}=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}^2\beta-1}$; г) $\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$;

д) $\cos^4\gamma-\sin^4\gamma=1-2\sin^2\gamma$; е) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha$; ж) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}=\cos\alpha$;

з) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\gamma+1}{\operatorname{tg}^2\gamma-1}=\dfrac{1}{\sin^2\gamma-\cos^2\gamma}$; и) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=1-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; к) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

л) $3(\sin^4x+\cos^4x)-2(\sin^6x+\cos^6x)=1$; м) $\sin^2x\cos^2y+\sin^2x\sin^2y+\cos^2x\sin^2y+\cos^2x\cos^2y=1$.

15.4. а) Дано: $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

б) Дано: $\cos\alpha=\dfrac{8}{17}$, $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

в) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

г) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{9}{40}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

15.5. а) Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Найдите $\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$. б) Дано: $\sin\alpha-\cos\alpha=a$. Найдите $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$.
в) Дано: $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha=a$. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha$. г) Дано: $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=a$. Найдите $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$.

д) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=3$. Найдите $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$. е) Дано: $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$. Найдите $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$.

ж) Дано: $\sin\alpha\cos\alpha=0{,}4$. Найдите $\left|\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}\right|$. з) Дано: $\sin\alpha+\cos\alpha=a$. Найдите $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

и) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-2$. Найдите $\dfrac{\sin^4\alpha}{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$.

15.6. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)\operatorname{tg}(3\pi+\alpha)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}{\cos(\alpha-2\pi)\sin\left(\frac{5}{2}\pi-\alpha\right)\operatorname{tg}(-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}$; б) $\dfrac{\operatorname{ctg}(270^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2(\alpha-180^\circ)}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2(360^\circ-\alpha)-1}{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)}$;

в) $\dfrac{\cos^2(2\alpha-90^\circ)+\operatorname{ctg}^2(90^\circ+2\alpha)+1}{\sin^2(2\alpha-270^\circ)+\operatorname{tg}^2(270^\circ+2\alpha)+1}$; г) $\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2$;

д) $\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2-\left(\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2$;

е) $\sin 160^\circ\cos 110^\circ+\sin 250^\circ\cos 340^\circ+\operatorname{tg}110^\circ\operatorname{tg}340^\circ$; ж) $\operatorname{tg}18^\circ\operatorname{tg}288^\circ+\sin 32^\circ\sin 148^\circ-\sin 302^\circ\sin 122^\circ$;

з) $\dfrac{\cos^2(\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^2\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)}$; и) $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)}$.