

Часть 6. Квадратные неравенства

О п р е д е л е н и е. Квадратными неравенствами называются неравенства

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad ax^2 + bx + c \geq 0, \quad ax^2 + bx + c < 0, \quad ax^2 + bx + c \leq 0, \quad \text{где } a \neq 0.$$

Решить квадратное неравенство — это значит найти все его корни (решения), т. е. все числа, удовлетворяющие неравенству.

Геометрический смысл: указать абсциссы всех точек графика квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, ординаты которых положительны (неотрицательны, отрицательны, неположительны).

Квадратные неравенства можно решать, используя свойства модуля, например:

$$x^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 9 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$$

В более сложных случаях можно выделить полный квадрат, например:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x - 2| \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq 1; \end{cases} \\ -2x^2 + 3x + 4 \geq 0 &\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2 \cdot \frac{3}{4}x + \frac{9}{16} - \frac{9}{16} - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{41}{16} \leq 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 \leq \frac{41}{16} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| \leq \frac{\sqrt{41}}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{41}}{4} \Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \leq x \leq \frac{3 + \sqrt{41}}{4}. \end{aligned}$$

Рассмотрим на следующем примере ещё один способ решения квадратных неравенств.

П р и м е р 1. Решите неравенство $x^2 - x - 2 > 0$.

Разложив на множители левую часть неравенства, получим

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x + 1 < 0, \\ x - 2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1, \\ x > 2, \\ x < -1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Это же неравенство можно решить, используя изученные свойства квадратного трёхчлена.

График квадратного трёхчлена $y = x^2 - x - 2$ — парабола, её ветви направлены вверх (коэффициент при x^2 положителен), абсциссы точек пересечения с осью Ox : $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ (корни квадратного уравнения $x^2 - x - 2 = 0$). Все точки оси абсцисс, для которых парабола находится выше этой оси (т. е. решения данного неравенства), расположены вне промежутка между корнями x_1 и x_2 . Значит, множество решений данного неравенства — объединение открытых лучей: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$. Записывать решение лучше так:

$$x^2 - x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x < -1. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Запись такого решения должна сопровождаться графической иллюстрацией и необходимыми вспомогательными вычислениями (нахождение корней соответствующего квадратного уравнения и т. п.).

Квадратные неравенства можно решать любым из перечисленных выше способов, но чаще всего мы будем пользоваться последним.

П р и м е р 2. Решите неравенство $3x^2 - 2x + 1 > 0$.

График квадратного трёхчлена $y = 3x^2 - 2x + 1$ — парабола, её ветви направлены вверх (коэффициент при x^2 положителен), она не пересекает ось абсцисс, так как уравнение $3x^2 - 2x + 1 = 0$ не имеет решений (его дискриминант отрицателен). Поэтому парабола расположена выше оси Ox для всех точек оси абсцисс. Следовательно, данное неравенство истинно для всех x .

Ответ: x — любое.

П р и м е р 3. Решите неравенство $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$.

$$4x^2 + 4x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow (2x + 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$.

Рассмотрим квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$.

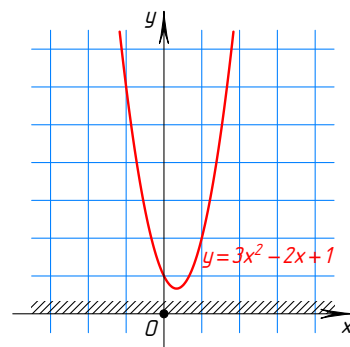
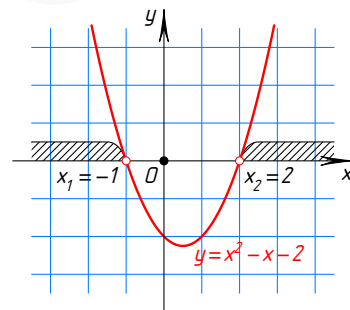
Если $a > 0$ и $D \geq 0$, то множество его решений — объединение лучей $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, где $x_1 \leq x_2$ — корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $a > 0$, $D < 0$, то неравенство истинно для всех x .

Рассмотрим квадратное неравенство $ax^2 + bx + c < 0$.

Если $a > 0$ и $D > 0$, то множество его решений — интервал $(x_1; x_2)$, где $x_1 < x_2$ — корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Если $a > 0$, $D \leq 0$, то неравенство не имеет решений.



Случаи, когда $a < 0$, мы не рассматриваем, поскольку можно всегда добиться того, чтобы коэффициент при x^2 в квадратном неравенстве был положительным (умножив обе части этого неравенства на -1 и поменяв знак неравенства на противоположный).

Рассмотрите самостоятельно неравенства $ax^2 + bx + c \leq 0$ и $ax^2 + bx + c \geq 0$.

Задачи

6.1. Решите неравенства:

- а) $(x+4)(x-5) > 0$; б) $(3x-1)(x+2) \leq 0$; в) $(x+5)(x-8) < 0$; г) $(2-x)(2x+5) \leq 0$; д) $-2(1-x)(3-x) \leq 0$; е) $5(x+3)(x+2) < 0$;
ж) $(2x-5)(2-x) \leq 0$; з) $(x-4)(3-4x) > 0$; и) $(3x-1)(5-x) > 0$; к) $(3-2x)(3-x) > 0$; л) $(x+9)(1-5x) \geq 0$; м) $\frac{(1-3x)x}{4} \leq 0$.

6.2. Решите неравенства:

- а) $x^2 - x - 2 < 0$; б) $5x^2 - 4x - 1 \geq 0$; в) $3x^2 + 5x - 8 > 0$; г) $4x^2 - x \leq 0$; д) $2x + 5 - 7x^2 < 0$; е) $16 - x^2 \leq 0$;
ж) $2x^2 - 3x + 1 \geq 0$; з) $x^2 + 3x + 2 < 0$; и) $2x - 5 - x^2 < 0$; к) $3x - 1 \geq x^2$; л) $\frac{2}{3}x^2 - 4x + 1 > 0$; м) $x^2 + 9 \geq 0$;
н) $x^2 - 4x + 4 \leq 0$; о) $9x^2 + 6x + 1 > 0$; п) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$; р) $4x^2 - 12x + 9 < 0$; с) $6x - x^2 \leq 9$; т) $16x^2 + 8x \leq -1$.

6.3. Решите неравенства относительно x :

- а) $x^2 - 2ax + a^2 - 1 > 0$; б) $x^2 - 3ax + 2a^2 \leq 0$, если $a > 0$; в) $(2a^2 + a - 1)x^2 - 3ax + 1 < 0$, если $a > 2$;
г) $x^2 - a(a+2)x + a^3 \geq 1$; д) $x^2 - 2ax - b^2 + a^2 < 0$, если $b < 0$.

6.4. Решите неравенства:

- а) $\frac{1}{x^2 - 2x + 1} > 0$; б) $\frac{4x^2 + 1}{x + 9} < 0$; в) $-\frac{4}{x - x^2} \leq 0$; г) $\frac{x^2 + 8}{3 - x} < 0$; д) $\frac{x - 5 - x^2}{5x^2 - 3x - 2} > 0$; е) $\frac{7x^2 - 4x - 3}{3x^2 + 1} \leq 0$;
ж) $\frac{9 - 4x^2}{2x^2 - 2x + 1} > 0$; з) $x^4 - 2x^2 - 8 \leq 0$; и) $9 + 8x^2 - x^4 < 0$; к) $\frac{3x - 2}{x^2 + 1} > \frac{x^2}{x^2 + 1}$.

6.5. Решите уравнения:

- а) $x^2 = |x - 1|$; б) $|x^2 - x - 2| = x^2 - x - 2$; в) $|3x^2 - 4x + 1| = 4x - 1 - 3x^2$; г) $|x^2 - 1| = x + 3$.

6.6. Решите неравенства:

- а) $(x+2)^2 + |x+2| - 6 \leq 0$; б) $|x^2 - x| > 2$; в) $x^2 - 2|x - 1| < 4$; г) $|2x^2 - 3x + 1| \leq -2x^2 + 3x - 1$;
д) $|x - 3| + |x + 2| < 8 + 2x - x^2$; е) $|x^2 - 2|x| - 3| > 3$.

6.7. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — некоторые функции. Докажите следующие утверждения:

- а) $|f(x)| > |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) > g^2(x)$; б) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f^2(x) < g^2(x); \end{cases}$ в) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f^2(x) > g^2(x), \\ g(x) < 0; \end{cases}$
г) $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), \\ f(x) > -g(x); \end{cases}$ д) $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ f(x) < -g(x). \end{cases}$

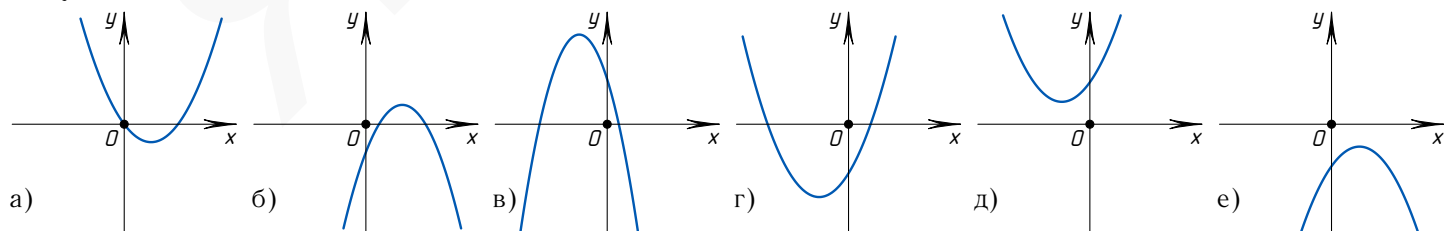
6.8. Решите неравенства:

- а) $|x - 2| < 2x - 1$; б) $|3x - 7| \geq x + 3$; в) $|5x - 2| \leq |2x + 1|$; г) $\left| \frac{1 - x}{x + 1} \right| > 3$; д) $\left| \frac{x + 4}{2x - 3} \right| \leq 6$; е) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} < 7 - x$;
ж) $|x^2 - 8x + 2| - x^2 \geq 2x + 2$; з) $|2x^2 - x| - 3 \leq 2x^2 + x + 5$; и) $|x^3 - x - 1| - 5 \geq x^3 + x + 8$;
к) $\frac{|x - 4| - |x - 1|}{|x - 3| - |x - 2|} < \frac{|x - 3| + |x - 2|}{|x - 4|}$; л) $\frac{|x + 2| - |x + 5|}{|x + 3| - |x + 4|} < \frac{|x + 3| + |x + 4|}{|x + 5|}$.

6.9. Найдите все x , при которых хотя бы одно из двух выражений $|x - 3|(|x - 4| - |x - 3|) - 6x$ и $|x|(|x| - |x - 7|) + 21$ неположительно и при этом его модуль не меньше модуля другого.

6.10. Парабола $y = 1996x^2 - 1940x - 57$ пересекает ось абсцисс в точках x_1 и x_2 . Не находя x_1 и x_2 , определите, где на этой оси расположены точки 0 ; 1 ; -1 ; -13 ; 1996 (т. е. лежат ли они внутри промежутка между корнями или вне).

6.11. Определите знаки коэффициентов a , b и c квадратного трёхчлена $y = ax^2 + bx + c$, если его график имеет следующий вид:



6.12. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее уравнение имеет два различных положительных корня: а) $x^2 - (a - 1)x + a - 2 = 0$; б) $x^2 + 2(a - 3)x + a + 9 = 0$.

6.13. Найдите все значения a , при каждом из которых следующее неравенство истинно для всех x :

- а) $x^2 + 2(1 - 2a)x + 2 - a > 0$; б) $(a + 1)x^2 - 2(3a - 1)x + 3 > a$; в) $(a - 1)x^2 - 2(a - 1)x + 3a - 5 < 0$; г) $(a^2 - a + 1)x^2 + (1 - 5a)x + 3 \geq 0$.

6.14. Для каких a корни квадратного уравнения $3x^2 + 2(a - 1)x + 1 = 0$ существуют, причём один из них больше 1 , а второй — меньше 1 ?

6.15. Известно, что $a(a + b + c) < 0$. Докажите, что квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет решение.