Часть 5. Квадратные уравнения

Определение. Уравнение вида $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ называется квадратным.

Рассмотрим несколько конкретных квадратных уравнений и найдём их корни.

Пример 1. $x^2-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Можно и так: $x^2-9=0 \Leftrightarrow x^2=9 \Leftrightarrow |x|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-3. \end{array}\right.$

Пример 2. $5x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(5x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\dfrac{3}{5}. \end{array}\right.$

Пример 3. $x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1-4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2-4=0 \Leftrightarrow (x-1-2)(x-1+2)=0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1. \end{array}\right.$

Пример 4. $x^2+3x-3=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot\dfrac{3}{2}x+\dfrac{9}{4}-\dfrac{9}{4}-3=0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{21}{4}=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{21}}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{21}}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{21}}{2}, \\ x=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{21}}{2}. \end{array}\right.$$

Пример 5. $x^2-4x+6=0 \Leftrightarrow x^2-4x+4+2=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+2=0$. Последнее уравнение не имеет решений, так как для каждого x левая часть положительна.

Формула корней квадратного уравнения

Попытаемся теперь решить произвольное квадратное уравнение.

$$ax^2+bx+c=0 \Leftrightarrow a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x^2+2\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0.$$

Дальнейшее зависит от знака выражения b^2-4ac (оно называется *дискриминантом* и обозначается буквой D). Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет решений. В этом случае левая часть последнего уравнения положительна для всех x. Если же $D\geqslant 0$, то

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{D}{4a^2}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{D}}{2a}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \\ x=\dfrac{-b-\sqrt{D}}{2a}. \end{array}\right.$$

В случае $D\geqslant 0$ можно кратко записать корни квадратного уравнения в таком виде:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$$

Полезно помнить и такой вид этой формулы:

$$x=\frac{-\dfrac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}.$$

Заметим, что при $D=0$ оба полученных корня равны между собой.

Итак, если дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ отрицателен, то уравнение не имеет решений; если положителен, то уравнение имеет два различных корня, если равен 0, то один корень.

Хотя полученные формулы верны для любого квадратного уравнения, их не имеет смысла применять при решении неполных квадратных уравнений, т. е. в случаях когда коэффициенты b или c равны 0 (см. примеры 1 и 2).

Если $a=1$, квадратное уравнение называется *приведённым*. Ясно, что разделив обе части любого квадратного уравнения на a $(a\neq 0)$, мы получим приведённое квадратное уравнение. Такое уравнение обычно записывают так: $x^2+px+q=0$ $\left(\text{здесь } p=\dfrac{b}{a},\ q=\dfrac{c}{a}\right)$. Формулы для решения приведённого квадратного уравнения (если $D=$ $=p^2-4q\geqslant 0$) можно записать так: $x=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$.

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Определение. Функция $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ называется квадратным трёхчленом.

Дискриминант квадратного трёхчлена — это дискриминант соответствующего квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Теорема. Если $D\geqslant 0$, то для каждого x верно равенство $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Для доказательства этой теоремы достаточно почти дословно повторить рассуждения, с помощью которых получены формулы для корней квадратного уравнения.

Теорема Виета

Теорема. Сумма корней приведенного квадратного уравнения $x^2+px+q=0$ равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение — свободному члену, т. е. $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$.

Для доказательства достаточно сложить и перемножить корни приведённого квадратного уравнения

$$x_1=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q} \quad \text{и} \quad x_2=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Теорема, обратная теореме Виета. Любые два числа x_1 и x_2 являются корнями приведённого квадратного уравнения $x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$.

При подстановке вместо x в левую часть этого уравнения каждого из чисел x_1 и x_2 получим верное числовое равенство.

Задачи

5.1. Решите уравнения: а) $x^2-x-2=0$; б) $5x^2-3x-2=0$; в) $9x^2-4=0$; г) $x^2+8x=0$; д) $-\frac{1}{2}x+3x^2=11$; е) $3x^2+8=x$; ж) $2x^2-3x-1=0$; з) $9x^2+4=12x$; и) $4x^2-9x-13=0$; к) $30x^2-11x+1=0$; л) $(x-1)(x+2)=2x$; м) $(3x-1)(2x+3)=(x+9)(2x+5)$.

5.2. Решите уравнения: а) $1996x^2-1000x-996=0$; б) $x^2-1997x+1996=0$; в) $x^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})x+\sqrt{6}=0$; г) $\sqrt{2}x^2+(1+\sqrt{2})x+1=0$; д) $x^2-(8!+90)x+10!=0$.

5.3. Решите уравнения относительно x: а) $x^2-(a-2b)x-2ab=0$; б) $(a^2-b^2)x^2-2ax+1=0$ $(|a|\neq|b|)$; в) $(a-b)^2x^2-(a^2-b^2)x+ab=0$ $(a\neq b)$; г) $x^2+a(a-1)(a^2+a+1)x-a^5=0$.

5.4. Разложите на множители выражения: а) $7x^2-3x-4$; б) $6x-5-x^2$; в) $3x^2-10x+2$; г) $9x-x^2$; д) $(2x-1)^2-5(2x-1)+6$; е) x^4-13x^2+36; ж) x^6-9x^3+8; з) $(x^2-2x)^2-2(x^2-2x)-3$; и) $5x^2-6xy+y^2$; к) $(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3$; л) $(x-1)(x-3)(x+5)(x+7)-297$; м) $(12x-1)(6x-1)(4x-1)(3x-1)-5$; н) $4x^4+3x^2+1$.

5.5. Решите уравнения: а) $(x-1)^2+|x-1|-2=0$; б) $x^4-100x^2+99=0$; в) $3x-2=\left|\frac{5x-1}{x+3}\right|$; г) $1+(b^2-4a^2)x^2-4a^2b^2x^4=0$ $(ab\neq 0)$; д) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1}$; е) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0$; ж) $x^2+5x+6=\frac{15(x^2+3x+6)}{x^2+x}$; з) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$; и) $(x+2)^4+x^4=82$.

5.6. Найдите наименьшее значение следующего выражения: а) $2x^2+1$; б) x^2-2x+5; в) x^2-3x+1; г) $2x^2-4x+3$; д) x^2-x; е) $3x^2+5x-1$.

5.7. Найдите наибольшее значение следующего выражения: а) $3-2x^2$; б) $4x+3-x^2$; в) $5x-2-x^2$; г) $9-6x-2x^2$; д) $3x-x^2$; е) $4+7x-3x^2$; ж) $\frac{1}{x^2-x+1}$.

5.8. Найдите наибольшее значение ab, если $a+2b=1$.

5.9. Пусть x_1 и x_2 — отличные от нуля корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Докажите, что числа $\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{x_2}$ — корни квадратного уравнения $cx^2+bx+a=0$.

5.10. Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Не пользуясь формулой для корней квадратного уравнения, вычислите: а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $x_1^2+x_2^2$; в) $x_1^3+x_2^3$; г) $x_1^4+x_2^4$.

5.11. Известно, что p и q — корни квадратного уравнения $x^2+px+q=0$. Найдите p и q.

5.12. Пусть D — дискриминант квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$. Имеет ли это уравнение корни и каковы их знаки, если: а) $D>0$, $a>0$, $b>0$, $c>0$; б) $D>0$, $a>0$, $b<0$, $c>0$; в) $a>0$, $c<0$; г) $a<0$, $c>0$; д) $ac<0$.

5.13. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет ровно один корень: а) $x^2-6x-a=0$; б) $x^2-2ax+a=0$; в) $4ax^2-4x+1=0$; г) $(a-1)x^2+2ax-a=1$; д) $(2-a)x^2-(a+1)x+a=1$.

5.14. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет два положительных корня: а) $x^2-4x+a=0$; б) $x^2-2(a+1)x+a^2+2=0$; в) $x^2-(a^2+2)x+a^2+1=0$.

5.15. Найдите все значения a, при каждом из которых следующее уравнение имеет два корня разных знаков: а) $x^2-(3a+1)x-a^2=0$; б) $ax^2+(2a-1)x-a=0$; в) $ax^2-(a-1)^2x+a=2$.

5.16. Найдите все пары целых чисел x и y, удовлетворяющих следующему уравнению: а) $x^2-y^2=3$; б) $x^2-9y^2=7$; в) $x^2+xy-6y^2=6$.

5.17. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему условию: а) $x^2-x-6=0$; б) $(x-2y)(x+y-3)=0$; в) $4x^2-5xy+y^2=0$; г) $x^4-10x^2y^2+9y^4=0$.

5.18. а) Докажите, что для всех a, b и c уравнение $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет решение.
б) Докажите тождество $\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1$.

5.19. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $(2;-2)$ и касающейся параболы $y=x^2-6x+10$.

5.20. Решите уравнение $x^2-10[x]+9=0$, где $[x]$ — целая часть x.

5.21. Найдите область изменения следующих функций: а) $y=\frac{1}{x^2-4}$; б) $y=\frac{x+1}{x^2+2x+2}$; в) $y=\frac{3x-1}{9x^2-3x+4}$.