

Часть 4. График квадратного трёхчлена

Нам уже известны свойства и график функции $y = x^2$. Рассмотрим теперь произвольный квадратный трёхчлен, т. е. функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Если $b = c = 0$, то наша функция имеет вид $y = ax^2$. График этой функции получается умножением ординаты каждой точки известного графика функции $y = x^2$ на a . В результате мы также получим линию, называемую параболой, причём, если $a > 0$, то «ветви» этой параболы направлены вверх, если же $a < 0$ — то вниз.

Приме р. График функции $y = 2x^2$ получается из параболы $y = x^2$ «растяжением» вдоль оси ординат в 2 раза, или «сжатием» вдоль оси абсцисс в $\sqrt{2}$ раз. График функции $y = -2x^2$ — образ параболы $y = 2x^2$ при симметрии относительно оси абсцисс.

Ранее было установлено, что с помощью выделения полного квадрата любой квадратный трёхчлен можно представить в виде

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a(x - d)^2 + e,$$

поэтому его график можно получить с помощью параллельного переноса параболы $y = ax^2$. Координаты вершины новой параболы — $(d; e)$. Например, если $d > 0$ и $e > 0$, то парабола $y = ax^2$ смещается на d единиц вправо и на e единиц вверх.

Приме р. Постройте график квадратного трёхчлена $y = -2x^2 + 8x - 5$.

Выделим полный квадрат:

$$y = -2x^2 + 8x - 5 = -2(x^2 - 4x) - 5 = -2(x^2 - 4x + 4 - 4) - 5 = -2(x - 2)^2 + 8 - 5 = -2(x - 2)^2 + 3.$$

График функции $y = -2(x - 2)^2 + 3$ — парабола, полученная из параболы $y = 2x^2$ с помощью симметрии относительно оси абсцисс, затем параллельного переноса на 2 единицы вправо вдоль оси абсцисс и, наконец, параллельного переноса на 3 единицы вверх вдоль оси ординат.

Итак, график квадратного трёхчлена — парабола. Абсцисса вершины этой параболы — $x_{\text{в}} = -\frac{b}{2a}$. Если $a > 0$, ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$ — вниз.

Если дискриминант квадратного трёхчлена положителен, то парабола пересекает ось абсцисс в двух точках (абсциссы этих точек — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$), если меньше нуля — то не имеет с осью абсцисс ни одной общей точки, если равен нулю — парабола имеет с осью абсцисс ровно одну общую точку (в этом случае говорят, что парабола касается оси абсцисс). В последнем случае квадратный трёхчлен представляет собой полный квадрат, т. е. $y = a(x - d)^2$.

Задачи

- 4.1. Постройте графики следующих функций: а) $y = \frac{1}{2}x^2$; б) $y = 3x^2 + 1$; в) $y = 9 - x^2$; г) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 3$; д) $y = (x + 1)^2$; е) $y = 3(x - 2)^2$; ж) $y = -(x + 2)^2 + 1$; з) $y = \frac{1}{2}(4 - x)^2 - 3$; и) $y = -(x + 3)^2 - 2$; к) $y = -4x^2 + 4x + 1$; л) $y = x^2 - 6x + 11$; м) $y = x^2 + 2x - 3$; н) $y = x^2 + x$; о) $y = -x^2 + 8x - 10$; п) $y = 2x^2 - 4x + 1$; р) $y = 3x^2 + 6x - 2$.
- 4.2. Постройте графики следующих функций: а) $y = x^2 - 2|x|$; б) $y = |x^2 - 2x|$; в) $y = |x^2 - 2||x|$; г) $y = |(x + 2)(x - 5)|$; д) $y = x^2 - 2|x| - 8$; е) $y = |x^2 - 2x - 8|$; ж) $y = |x^2 - 2||x| - 8|$; з) $y = (x - 2)|x|$; и) $y = |x + 1|(x - 1)$; к) $y = x^2 + 2|x - 1|$; л) $y = -x^2 + |3 - x|$.
- 4.3. Сколько общих точек могут иметь графики функций: а) $y = ax^2 + bx + c$ и $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$; б) $y = k|x - d| + e$ и $y = k_1|x - d_1| + e_1$; в) $y = ax^2 + bx + c$ и $y = k|x - d| + e$?
- 4.4. Прямая $y = kx + t$ пересекает параболу $y = ax^2 + bx + c$ в двух точках. Известно, что k, t, a, b, c и обе координаты одной из точек пересечения — рациональные числа. Верно ли, что обе координаты второй точки пересечения также рациональны?
- 4.5. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующему условию: а) $|y| \geq x^2$; б) $|y| \leq |x^2 - 9|$; в) $|y - 1| \leq x^2 - 2|x|$.
- 4.6. Для каждого a определите число решений следующего уравнения: а) $x^2 - 2x = a$; б) $|x^2 - 4x - 5| = a$; в) $|x^2 + 2|x| - 8| = a$; г) $6x - 9 - x^2 = a|x - 3|$; д) $|x + 3| - a|x + 1| = 3$.