

Часть 3. Квадратный корень

Функция $y = x^2$

Область определения этой функции — вся числовая ось (любое число можно возвести в квадрат).

Пусть x_1 и x_2 — неотрицательные числа и $x_1 < x_2$. Тогда по известному свойству неравенств $x_1^2 < x_2^2$. Это означает, что функция $y = x^2$ возрастает на промежутке $[0; +\infty)$.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на некотором числовом промежутке, если для любых точек x_1 и x_2 этого промежутка таких, что $x_1 < x_2$, верно неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

П р и м е р ы. Функция $y = 2x + 1$ возрастает на всей числовой прямой. Действительно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $2x_1 + 1 < 2x_2 + 1$.

Функция $y = \frac{1}{x}$ убывает на луче $(0; +\infty)$, так как из неравенства $0 < x_1 < x_2$ следует неравенство $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$.

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ называется чётной, если её область определения симметрична относительно точки 0 и для каждого x из области определения $f(-x) = f(x)$.

Ясно, что $y = x^2$ — чётная функция. Вот ещё несколько примеров чётных функций:

$$y = x^4, \quad y = |x|, \quad y = 3x^2 - 2, \quad y = \frac{x^2}{5x^6 - 4}, \quad y = 5, \quad y = |x - 1| + |x + 1|.$$

О п р е д е л е н и е. Функция $y = f(x)$ называется нечётной, если её область определения симметрична относительно точки 0 и для каждого x из области определения $f(-x) = -f(x)$.

П р и м е р ы. $y = x$, $y = x^3$, $y = x|x|$, $y = \frac{1}{x}$, $y = -2x^5 + 4x^3 - \frac{1}{x}$.

Если функция не является ни чётной, ни нечётной, она называется функцией общего вида. Например: $y = 2x - 1$, $y = |x + 3| - 5$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, график нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Построим схему графика функции $y = x^2$, вычислив несколько значений этой функции и соединив плавной линией отмеченные на координатной плоскости точки (x, x^2) . Мы говорим о схеме графика, поскольку точный график построить в принципе невозможно. Для этого пришлось бы произвести бесконечно много вычислений.

График функции $y = x^2$ называется параболой. Это фигура симметрична относительно оси ординат, она расположена в верхней полуплоскости (поскольку квадрат любого числа неотрицателен).

Рассмотрим нашу функцию только на промежутке $[0; +\infty)$. Примем без доказательства следующий факт: каждая прямая, параллельная оси абсцисс и расположенная не ниже этой оси, имеет хотя бы одну общую точку с графиком функции $y = x^2$, построенным для $x \geq 0$. Это утверждение будет доказано в старших классах.

Таким образом, можно отметить ещё одно важное свойство нашей функции: область изменения (множество значений) функции $y = x^2$ — промежуток $[0; +\infty)$.

Определение квадратного корня

О п р е д е л е н и е. Квадратным корнем из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b , квадрат которого равен a . Обозначение: $b = \sqrt{a}$.

Итак, по определению $\sqrt{a} \geq 0$ и $(\sqrt{a})^2 = a$.

П р и м е р ы. $\sqrt{4} = 2$, так как $2 \geq 0$ и $2^2 = 4$; $\sqrt{3249} = 57$, так как $57 \geq 0$ и $57^2 = 3249$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{(-5)^2} = 5$.

А как быть с $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д.?

Теорема. Для любого неотрицательного числа существует единственный квадратный корень из этого числа.

Доказательство. Рассмотрим функцию $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$. Из сказанного ранее следует, что для каждого $a \geq 0$ существует хотя бы одно $b \geq 0$ такое, что $b^2 = a$. Т. е. квадратный корень из a существует.

Осталось доказать его единственность. Пусть это не так, т. е. найдутся по крайней мере два таких числа $b_1 \geq 0$ и $b_2 \geq 0$, для которых $b_1^2 = a$ и $b_2^2 = a$. Если при этом $b_1 < b_2$ то из возрастания функции $y = x^2$ на промежутке $[0; +\infty)$ следует, что $b_1^2 < b_2^2$, а это противоречит предположению о том, что $b_1^2 = a$ и $b_2^2 = a$. Аналогично для случая $b_1 > b_2$. Единственность доказана.

Аналогично можно доказать такое важное свойство квадратного корня: $0 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$.

Возвратимся к $\sqrt{2}$. Поскольку $1 < 2 < 4$, то $1 < \sqrt{2} < 2$, значит, целая часть $\sqrt{2}$ равна 1. Поскольку $1,96 < 2 < 2,25$, то $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$, значит, запись числа $\sqrt{2}$ в виде десятичной дроби имеет вид $1,4 \dots$. Для того, чтобы вычислить следующую цифру в этой записи, достаточно разделить отрезок $[1,4; 1,5]$ на 10 равных частей и найти, в какую из этих частей попадает число $\sqrt{2}$ и т. д. Таким способом мы сможем вычислить $\sqrt{2}$ с любой наперёд заданной точностью.

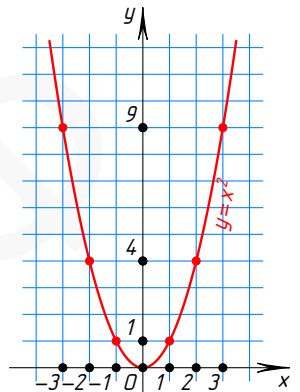
Через некоторое время будет доказано, что число $\sqrt{2}$ не является рациональным, т. е. не может быть представлено в виде отношения двух целых чисел, или, что то же самое, не может быть записано в виде периодической десятичной дроби. Аналогично для чисел $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д.

Свойства квадратного корня

Среди следующих важных свойств квадратного корня есть и отмеченные ранее.

- | | |
|---|---|
| (1) $\sqrt{a} \geq 0$ для любого $a \geq 0$; | (2) $(\sqrt{a})^2 = a$ для любого $a \geq 0$; |
| (3) $\sqrt{a^2} = a $ для любого a ; | (4) $a > b \Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b}$ для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$; |
| (5) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ для любых $a \geq 0$ и $b \geq 0$; | (6) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ для любых $a \geq 0$ и $b > 0$. |

Доказательство свойства (5). *Первый способ.* Нам нужно доказать, что число $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ является квадратным корнем из числа ab . Для этого достаточно проверить, во-первых, что число $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ неотрицательно и, во-вторых,



что его квадрат равен ab : $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \geq 0$ как произведение двух неотрицательных чисел; $(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 = ab$, что и требовалось доказать.

Второй способ. Пусть для некоторых неотрицательных чисел a и b это не так, т. е. либо $\sqrt{ab} > \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, либо $\sqrt{ab} < \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$. Тогда по свойству (4) либо $(\sqrt{ab})^2 > (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$, т. е. $ab > ab$, либо $(\sqrt{ab})^2 < (\sqrt{a} \cdot \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2$, т. е. $ab < ab$, что невозможно.

Свойства (3) и (6) докажите самостоятельно.

Задачи

3.1. Найдите промежутки возрастания и убывания для следующих функций: а) $y = -3x + 2$; б) $y = |x|$;
в) $y = \frac{1}{x^2}$; г) $y = |x-1| + 2$; д) $y = \frac{1}{x-2}$; е) $y = 2x^2 - 5$; ж) $y = x^2 - 2x + 1$; з) $y = 9 - x^2$; и) $y = 4x^2 + 4x - 3$; к) $y = \frac{x}{x+1}$;
л) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1}$; м) $y = x - \frac{1}{x}$; н) $y = x + \frac{1}{x}$.

3.2. Какие из следующих функций являются чётными или нечётными? а) $y = -5x^2 + 4$; б) $y = x^7 - 3x$;
в) $y = 5x - \frac{4}{x}$; г) $y = -|x|$; д) $y = \frac{|x|}{x}$; е) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x}-2}$; ж) $y = |2-x| + |x+2| - 5$; з) $y = \frac{x}{x^2-2}$; и) $y = \frac{x-2}{x^4+1}$;
к) $y = x(x+2)(2-x)$; л) $\sqrt{x^2-8x+16} - \sqrt{x^2+8x+16}$.

3.3. а) Докажите, что любой многочлен, т. е. функцию вида $y = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, где $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

б)* Докажите, что любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций.

3.4. Найдите области изменения (множества значений) следующих функций: а) $y = x^2 - 6x + 9$; б) $y = x^2 + 4x + 5$;
в) $y = 4x^2 - 4x + \frac{1}{2}$; г) $y = |x-1| + 1$; д) $y = -2|4+x| + 2$; е) $y = \frac{1}{x-3} + 2$; ж) $y = |x-4| + |x+2|$; з) $y = |x-1| - |x+3|$;
и) $y = x^2 - x$; к) $y = 2x^2 - 4x + 3$; л) $y = -2x^2 + 6x + 1$.

3.5. Вынесите множитель из-под знака квадратного корня: а) $\sqrt{25 \cdot 81 \cdot 8}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{1996}$, $\sqrt{6272}$, $\sqrt{20!}$; б) $\sqrt{a^2 \cdot b^4 \cdot c}$ ($a \leq 0$, $c \geq 0$); в) $\sqrt{18(a^2 - 2ab + b^2)}$ ($a \leq b$); г) $\sqrt{(a^2 + 1)\left(2 - a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2}$ ($a \neq 0$); д) $\sqrt{(\sqrt{a} + 1)(a + b - 2\sqrt{ab})}$ ($b \geq a \geq 0$).

3.6. Внесите множитель под знак квадратного корня: а) $(3b-1)\sqrt{3}$ ($b > 2$); б) $(a-b)\sqrt{a+b}$ ($a \geq b \geq 0$); в) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})\sqrt{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$.

3.7. Упростите выражение: а) $\sqrt{63} - 3\sqrt{1,75} - 0,5\sqrt{343} + \sqrt{112}$; б) $\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} + \frac{7}{2\sqrt{2}+1} - \frac{11-5\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

3.8. Упростите выражение: а) $\frac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; б) $\frac{a-6\sqrt{ab}+9b}{3\sqrt{b}-\sqrt{a}}$; в) $\frac{4-x}{2+\sqrt{x}}$; г) $\frac{9a-4b}{3\sqrt{a}-2\sqrt{b}}$; д) $\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$;
е) $\frac{\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}}{a+\sqrt{ab}+b}$; ж) $\frac{27\sqrt{x^3}+8\sqrt{y^3}}{3\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$; з) $\frac{a-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$; и) $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{ab}-b}$; к) $\frac{c-d}{c\sqrt{d}-d\sqrt{c}}$.

3.9. Упростите выражения: а) $\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{x^2-\sqrt{x}}$; б) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$; в) $\frac{x-1}{x+\sqrt{x}+1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}-1} + 2\sqrt{x}$;
г) $\left(\frac{a+2}{\sqrt{2a}} - \frac{a}{\sqrt{2a}+2} + \frac{2}{a-\sqrt{2a}}\right) \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{2}}{a+2}$; д) $\left(\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 + 2a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{3a^2+3b\sqrt{ab}} + \frac{a+\sqrt{ab}}{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}\right)^2 \cdot (a^2+ab-2b^2)^2$;
е) $\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}} - \frac{2}{x\sqrt{x}} + \frac{\frac{1}{x^2}-x}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}$; ж) $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-4b}{(a-b)\left(\sqrt{\frac{1}{b}}+3\sqrt{\frac{1}{a}}\right)} \cdot \frac{a+9b+6\sqrt{ab}}{\frac{1}{\sqrt{b}}+\frac{1}{\sqrt{a}}}$.

3.10. Сравните числа: а) $\sqrt{5}$ и $\frac{9}{4}$; б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ и 3; в) $\sqrt{15}+\sqrt{17}$ и $\sqrt{13}+\sqrt{19}$.

3.11. Упростите выражения: а) $\sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$; б) $\frac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$.

3.12. Вычислите: а) $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}}$; б) $\sqrt{|40\sqrt{2}-57|} - \sqrt{40\sqrt{2}+57}$;
в) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{200}+\sqrt{199}}$.

3.13. Докажите неравенства:

а) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ для всех $a \geq 0$ и $b \geq 0$; б) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} + \frac{1}{\sqrt{bc}}$ для всех $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$;

в) $1+ab \leq \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}$ для всех положительных a и b ;

г) $\frac{(a^2+3a+1)(a^4-a^2+1)}{a^3} \geq 5$ для всех положительных a (для каких a выполняется равенство?);

д) $(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$ для всех натуральных n и положительных $a_1, a_2, \dots, a_n$ таких, что $a_1 a_2 \dots a_n = 1$;

е) $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$ для всех натуральных n ;

ж) $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 5$ для всех $a \geq -\frac{1}{4}$, $b \geq -\frac{1}{4}$, $c \geq -\frac{1}{4}$ таких, что $a+b+c=1$.