

Часть 2. Модуль числа

О п р е д е л е н и е. Модулем неотрицательного числа a называется само число a ; модулем отрицательного числа a называется число $-a$, т. е.

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

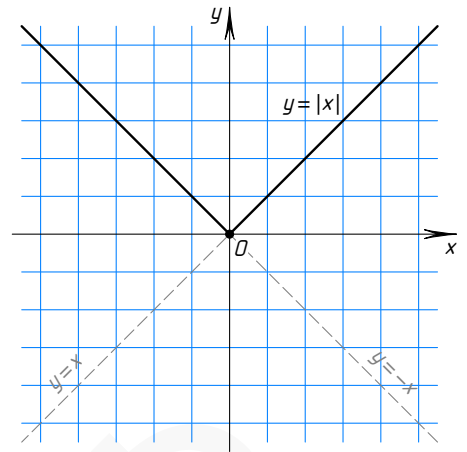
Свойства модуля

- (1) $|a| \geq 0$; (2) $|a| \geq a$; (3) $|ab| = |a||b|$; (4) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
 (5) $|-a| = |a|$; (6) $|a|^2 = a^2$; (7) $|a + b| \leq |a| + |b|$; (8) $|a - b| \geq ||a| - |b||$;
 (9) $|a|$ — это расстояние от точки a на числовой оси до точки 0;
 (10) $|a - b|$ — это расстояние между точками a и b на числовой оси.

Часть из этих свойств непосредственно следует из определения модуля, часть мы уже доказали. Остальные докажите самостоятельно.

График функции $y = |x|$

Заметим, что при замене x на $-x$ ничего не изменится (свойство (5)). Это означает, что для каждой точки с координатами x и y , принадлежащей графику функции $y = |x|$, точка с координатами $-x$ и y также принадлежит этому графику. Точки $(x; y)$ и $(-x; y)$ симметричны относительно оси ординат, следовательно, график функции $y = |x|$ также симметричен относительно оси ординат. В полуплоскости $x \geq 0$ график нашей функции представляет собой луч, исходящий из начала координат под углом 45° к оси абсцисс (часть прямой $y = x$). Отразим этот луч симметрично относительно оси ординат (получим часть прямой $y = -x$). Объединение первого луча с его симметричным образом и есть искомый график.



Тот же график на основании определения модуля строится так: $y = x$ для $x \geq 0$ — строим первый луч; $y = -x$ для $x < 0$ — строим второй луч.

График функции $y = a|x + b| + c$

Рассмотрим несколько частных случаев.

График функции $y = |x - 1|$ можно построить разобрав два случая: $y = x - 1$ для $x \geq 1$, $y = -x + 1$ для $x < 1$. А можно заметить, что график этой функции симметричен относительно прямой $x = 1$ (действительно, эта функция принимает одинаковые значения в точках $1 + t$ и $1 - t$ для любого t : $f(1 + t) = |(1 + t) - 1| = |t|$ и $f(1 - t) = |(1 - t) - 1| = |-t| = |t|$). Таким образом, график этой функции может быть получен из графика функции $y = |x|$ переносом на 1 вправо. (На самом деле при построении такого графика удобнее перенести на 1 влево ось ординат.)

Ясно, что график функции $y = |x - 5|$ получается из графика функции $y = |x|$ переносом на 5 вправо, график функции $y = |x + 2|$ получается из графика функции $y = |x|$ переносом на 2 влево и т. д.

График функции $y = |x - 1| + 3$ можно построить, также разобрав два случая: $y = x + 2$ для $x \geq 1$, $y = -x + 4$ для $x < 1$. А можно заметить, что он получается из графика функции $y = |x - 1|$ переносом на 3 вверх (к каждой ординате графика функции $y = |x - 1|$ прибавляется 3).

Понятно, что график любой функции вида $y = |x + b| + c$ представляет собой прямой угол с вершиной в точке $(-b; c)$, прямая $x = -b$ — ось симметрии (биссектриса) этого угла, стороны угла обращены вверх (в то время как у графика функции $y = -|x + b| + c$ — вниз).

Сформулируйте теперь, каким образом влияет на вид графика функции $y = a|x + b| + c$ коэффициент a .

Рассмотрим пример построения графика функции, содержащей несколько знаков модуля.

Пример. Постройте график функции $y = |x - 2| + |x + 3|$.

Решение. Первый способ. Разобьём числовую ось точками -3 и 2 на три промежутка и на каждом из них построим график линейной функции:

$$\begin{aligned} y &= -x + 2 - x - 3 = -2x - 1 && \text{для } x < -3; \\ y &= -x + 2 + x + 3 = 5 && \text{для } -3 \leq x < 2; \\ y &= x - 2 + x + 3 = 2x + 1 && \text{для } x \geq 2. \end{aligned}$$

Второй способ. На каждом из трёх промежутков $(-\infty; -3]$, $[-3; 2]$ и $[2; +\infty)$ имеем какую-то линейную функцию. Вычислим значения функции в точках -3 , 2 и в каких-нибудь точках на лучах $(-\infty; -3)$ и $(2; +\infty)$, например, в точках -4 и 3 . Получим: $f(-3) = 5$, $f(2) = 5$, $f(-4) = 7$, $f(3) = 7$. Отметим полученные точки на координатной плоскости и проведём два нужных луча и отрезок.

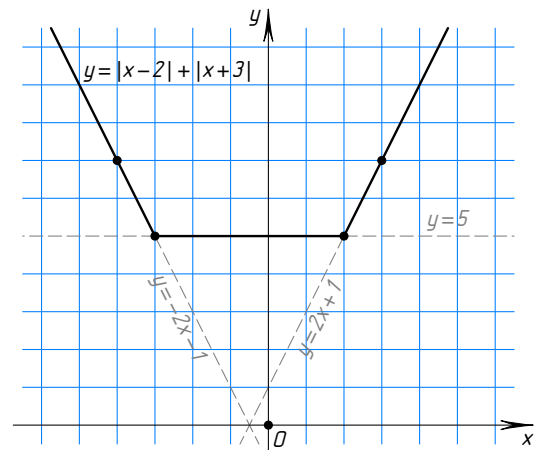
Уравнения и неравенства, содержащие знак модуля

Пример. Решите уравнение $|x - 4| = 3$.

$$\text{Решение. Первый способ. } |x - 4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = 3, \\ x - 4 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7, \\ x = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x = 1$ или $x = 7$.

Второй способ. $|x - 4|$ — это расстояние между точками x и 4 на числовой оси. Следовательно, нужно найти все точки числовой оси, удалённые от точки 4 на расстояние, равное 3 . Ясно, что это точки 1 и 7 .



Третий способ. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = |x - 4|$ и $y = 3$ (см. рисунок).

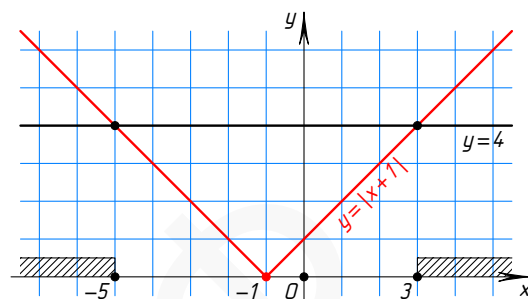
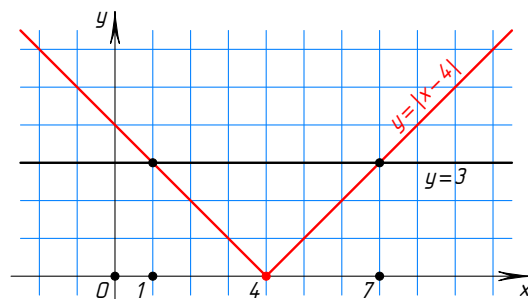
Приме р. Решите неравенство $|x + 1| \geq 4$.

Решение. Первый способ. $|x + 1| \geq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 4, \\ x + 1 \leq -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3, \\ x \leq -5. \end{cases}$

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Второй способ. $|x + 1|$ — это расстояние между точками x и -1 на числовой оси. Следовательно, нужно найти все точки числовой оси, удалённые от точки -1 на расстояние, большее либо равное 4. Ясно, что это все точки, принадлежащие множеству $(-\infty; -5] \cup [3; +\infty)$.

Третий способ. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций $y = |x + 1|$ и $y = 4$ (см. рисунок). Отметим абсциссы тех точек, для которых первый график расположен не ниже второго.



Задачи

2.1. Постройте графики функций: а) $y = 2|x|$; б) $y = -\frac{1}{3}|x|$;

в) $y = |x + 4| - 2$; г) $y = -|x - 3| + 2$; д) $y = -3|x + 1| + 4$.

2.2. Постройте графики неравенств: а) $y \geq -|x| + 1$; б) $y \leq |5 - x| - 2$;

в) $y \geq |2x - 4| + 3$; г) $y \leq |3 - 2x| - 1$; д) $y \geq -3|x + 4| - 5$.

2.3. Постройте графики функций:

а) $y = x + |x|$; б) $y = 2|x| - x$; в) $y = ||x| - 2|$; г) $y = |1 - |x|| + 2$; д) $y = ||x| - 1| - 1$; е) $y = -2|x + 3| + x$; ж) $y = \frac{|x|}{x}$.

2.4. Постройте графики функций:

а) $y = |x - 4| + |x + 4|$; б) $y = 2|x - 1| + |x + 3|$; в) $y = |x + 3| - |x - 5|$; г) $y = 3|x - 4| + |x + 2| - 2x$;

д) $y = |x - 2| - 2|x + 2| + x$; е) $y = |x - 5| + 2|x + 3| - 3x + 3$; ж) $y = |x + 3| - |x| + |x - 5|$; з) $y = 2|x + 5| + |x - 1| - |x - 5|$.

2.5. Какие значения может принимать $x + y + z + t + u$, если $|x| = 1$, $|y| = 2$, $|z| = 4$, $|t| = 8$, $|u| = 16$?

2.6. Докажите, что $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$ для всех x , y и z .

2.7. Известно, что $|x + 2| \leq 3$, $|x - 4| \leq 5$. Докажите, что $|x| \leq 1$.

2.8. Найдите наименьшее значение выражения $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| + |x - 6|$. При каких значениях x оно достигается?

2.9. На прямом шоссе через равные промежутки стоят шесть домов. Где нужно вырыть колодец, чтобы суммарное расстояние от всех домов до колодца было как можно меньше? А если промежутки между домами различны?

2.10. Найдите выражение, содержащее буквы x и y , арифметические операции и знаки абсолютной величины, значение которого равно наибольшему (наименьшему) из чисел x и y .

2.11. Решите уравнения:

а) $|x| = 3$; б) $|x - 2| = 5$; в) $|x + 3| = 1$; г) $|5 - x| = 3$; д) $|2x - 1| = -1$; е) $|x - 4| = \frac{1}{2}$; ж) $|x + 5| = \frac{5}{2}$; з) $|4 - x| = 4$;

и) $|3x - 2| = 1$; к) $|2x + 5| = 2$; л) $|4 - 3x| = 2$; м) $|x - 5| = |x - 1|$; н) $|x - 2| = |x + 4|$; о) $\left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| = 1$; п) $\left| \frac{2x - 1}{x - 3} \right| = 2$.

2.12. Решите неравенства:

а) $|x| < 5$; б) $|x| \geq 2$; в) $|x - 3| > 1$; г) $|1 - x| < 4$; д) $|x - 2| \geq -1$; е) $|x - 4| < -2$; ж) $|x + 3| > 5$; з) $|7 - x| \leq 4$;

и) $|3x - 5| > 2$; к) $|2x + 1| \leq 1$; л) $|3 - 2x| > 4$; м) $|5x - 3| \geq -2$; н) $|x - 3| \geq |x - 7|$; о) $|6 - x| < |x + 4|$.

2.13. Решите уравнения:

а) $|x - 3| = 3x - 1$; б) $3|x - 3| = 2x + 9$; в) $x = |x - 4|$; г) $|x + 2| = x + 2$; д) $|4x - 3| = 3 - 4x$; е) $|5 - 2x| = 3x - 5$;

2.14. Решите неравенства:

а) $|x + 3| \geq 3x + 1$; б) $3|x - 1| < 12 - x$; в) $2|3 - x| \geq x - 4$; г) $2|x + 4| \geq -x - 4$; д) $2|x + 2| > x + 8$;

е) $\left| \frac{x - 1}{x + 2} \right| \leq 1$; ж) $\left| \frac{3x - 2}{x + 4} \right| \leq 3$; з) $\left| \frac{5x + 2}{2 - x} \right| > 5$; и) $\left| \frac{2x + 1}{x - 3} \right| > 1$; к) $\left| \frac{x + 3}{x - 2} \right| \geq 2$.

2.15. Решите уравнения:

а) $|x + 5| = 2|x - 2|$; б) $|2x - 3| - |x - 5| = 1$; в) $|x - 4| = |x + 2| - 6$; г) $|x + 3| + |x - 2| = 5$.

2.16. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты x и y которых удовлетворяют следующим условиям:

1) $y \geq |x|$; 2) $|y| \leq |x|$; 3) $|y - 2| \geq x$; 4) $|x + 2| \geq |y - 3|$; 5) $|x| + |y| \leq 2$; 6) $|x - 2| + |y + 3| \geq 4$; 7) $|x| - |y - 2| \leq 1$;
8) $|x| + x = |y| + y$; 9) $|x + y| = x + y$; 10) $|x - y| = x + y$; 11) $|x + y| + |x - y| \leq 4$; 12) $|x + y| - |x - y| \geq 2$; 13) $|2x + y| + |2x - y| \leq 6$;
14) $|2x + y| + |x - 2y| \geq 6$; 15) $||x| - |y|| = x + y$; 16) $\max(x + y, x - y) = 1$; 17) $|x| + |y - x| = |y|$; 18) $|x| + |y| + |y - x| = 2|x|$.

2.17. Известно, что $|x + 2y| \leq 4$, $|x + y| \leq 3$. Какие значения может принимать x ?

2.18. Какое наибольшее число решений может иметь уравнение $||x - a| - b| - c| - d| = e$ относительно x при фиксированных a , b , c , d , e ?

2.19. Найдите наименьшее значение выражения а) $|2x - y - 1| + |x + y| + |y|$; б) $|y| + |3x - y| + |x + y - 1|$, где x и y — произвольные действительные числа.