Часть 11. Геометрические неравенства. Элементы трёхгранного угла

11.1. Дан куб с ребром 1. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки до его вершин не меньше $4\sqrt{3}$.

11.2. Пусть a, b и c — длины сторон параллелепипеда, d — одна из его диагоналей. Докажите, что $a^2+b^2+c^2 \geqslant \frac{1}{3}d^2$.

11.3. Докажите, что общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых есть наикратчайшее расстояние между точками этих прямых.

11.4. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть M и K — середины этих отрезков. Докажите, что $MK < \frac{AD+BC}{2}$.

11.5. Докажите, что площадь любой грани тетраэдра меньше суммы площадей трёх остальных его граней.

11.6. Ребро правильного тетраэдра равно a. Через вершину тетраэдра проведено сечение, являющееся треугольником. Докажите, что периметр P сечения удовлетворяет неравенствам $2a < P \leqslant 3a$.

11.7. Докажите, что угол наклонной с плоскостью есть наименьший из углов, образованных этой наклонной с прямыми плоскости.

11.8. Докажите, что сумма двух плоских углов трёхгранного угла больше третьего.

11.9. Докажите, что плоский угол четырёхгранного угла меньше суммы трёх остальных.

11.10. Докажите, что сумма углов пространственного четырёхугольника не превосходит $360°$.

11.11. Докажите, что сумма внутренних двугранных углов трёхгранного угла больше π и меньше 3π.

11.12. Пусть MC — перпендикуляр к плоскости треугольника ABC. Верно ли, что $\angle AMB < \angle ACB$?

11.13. Докажите, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше $360°$.

11.14. Верно ли, что в сечении любого трёхгранного угла плоскостью можно получить правильный треугольник?

11.15. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине A равны по $60°$. Докажите, что $AB+AC+AD \leqslant BC+CD+DB$.

11.16. Основание пирамиды $ABCD$ — правильный треугольник ABC. Известно, что $\angle BAD = \angle CBD = \angle ACD$. Докажите, что пирамида — правильная.

11.17. Один выпуклый многогранник лежит внутри другого. Докажите, что площадь поверхности внешнего многогранника больше площади поверхности внутреннего.

11.18. Можно ли в кубе вырезать отверстие, сквозь которое пройдёт куб того же размера?

11.19. *Теорема косинусов для трёхгранного угла.* Пусть α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла $SABC$ с вершиной S, противолежащие рёбрам SA, SB, SC соответственно, A, B, C — двугранные углы при этих рёбрах. Тогда

$$\cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}, \quad \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}, \quad \cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

11.20. Плоские углы трёхгранного угла равны $45°$, $45°$ и $60°$. Через его вершину проведена прямая, перпендикулярная одной из граней, плоский угол которой равен $45°$. Найдите угол между этой прямой и ребром двугранного угла, не лежащим в этой грани.

11.21. Выразите косинусы плоских углов трёхгранного угла через тригонометрические функции двугранных углов.

11.22. Все двугранные углы некоторого трёхгранного угла — острые. Докажите, что все плоские углы этого трёхгранного угла — также острые.

11.23. Диагональ AC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образует с рёбрами AB, AD и AA_1 углы α, β и γ. Докажите, что $\alpha+\beta+\gamma < 180°$.

11.24. *Теорема косинусов для тетраэдра.* Квадрат площади каждой грани тетраэдра равен сумме квадратов площадей трёх остальных граней без удвоенных попарных произведений площадей этих граней на косинусы двугранных углов между ними, т. е.

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 - 2S_1S_2\cos\alpha_{12} - 2S_1S_3\cos\alpha_{13} - 2S_2S_3\cos\alpha_{23}.$$

11.25. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Известно, что плоскости треугольников ASC и BSD перпендикулярны друг другу. Найдите площадь грани ASD, если площади граней ASB, BSC и CSD равны соответственно 5, 6 и 7.