Часть 10. Задачи на максимум и минимум

10.1. а) Рассматриваются всевозможные параллелепипеды, основания которых являются квадратами, а каждая из боковых граней имеет периметр 6. Найдите среди них параллелепипед с наибольшим объёмом и вычислите этот объём.

б) Рассматриваются всевозможные прямоугольные параллелепипеды, объём каждого из которых равен $1/2$, а одна из боковых граней является квадратом. Найдите среди них параллелепипед с наименьшим периметром основания и вычислите величину этого периметра.

10.2. а) Рассматриваются всевозможные правильные четырёхугольные пирамиды, описанные около шара радиуса r. Найдите высоту такой пирамиды с наименьшим объёмом.

б) Рассматриваются всевозможные правильные треугольные пирамиды, все боковые рёбра которых и плоскости оснований касаются шара радиуса r. Найдите высоту такой пирамиды с наименьшим объёмом.

в) В правильной четырёхугольной пирамиде расположены два одинаковых шара радиуса r, центры которых находятся на оси симметрии пирамиды. Один из шаров касается всех боковых граней пирамиды, а второй — основания пирамиды и первого шара. Найдите высоту пирамиды, при которой объём пирамиды наименьший.

г) В конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности конуса и другого шара. Найдите величину угла между образующей конуса и основанием, при котором объём конуса наименьший.

10.3. Найдите высоту и радиус основания: а) конуса; б) цилиндра наибольшего объёма вписанного в шар радиуса R.

10.4. Высота правильной треугольной пирамиды равна высоте её основания, объём пирамиды равен V. Рассматриваются правильные треугольные призмы, вписанные в пирамиду так, что боковое ребро лежит на высоте основания пирамиды, противоположная этому ребру боковая грань параллельна основанию пирамиды, и вершины этой грани лежат на боковой поверхности пирамиды. Найдите:

а) объём той призмы, плоскость боковой грани которой делит высоту пирамиды в отношении $3:1$, считая от вершины пирамиды;

б) наибольшее значение объёма рассматриваемых призм.

10.5. а) Сторона основания ABC правильной пирамиды $PABC$ равна a, боковое ребро равно b. На каком расстоянии от прямой BC следует провести сечение пирамиды, параллельное рёбрам BC и PA, чтобы площадь его была наибольшей из возможных?

б) Сторона основания ABC правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 4, угол боковой грани с плоскостью основания равен $\operatorname{arctg}\sqrt{23}$. Точки F, D и E расположены на рёбрах SA, AB и BC соответственно, причём $SF:AF=1:2$ и $BD=BE$. Какое наибольшее значение может иметь объём пирамиды $CDEF$?

10.6. Ребро AB тетраэдра $ABCD$ является диагональю основания четырёхугольной пирамиды, ребро CD параллельно другой диагонали этого основания, и концы его лежат на боковых рёбрах пирамиды. Найдите наименьший возможный объём пирамиды, если объём тетраэдра равен V.

10.7. Конус описан около куба следующим образом: четыре вершины куба лежат в плоскости основания конуса, а четыре другие вершины — на его боковой поверхности. Какой наименьший объём может иметь такой конус, если ребро куба равно a?

10.8. В сферу радиуса R вписана правильная четырёхугольная пирамида. Каков наибольший возможный объём этой пирамиды?

10.9. а) Около шара объёма V описана правильная треугольная пирамида. Каков наименьший возможный объём этой пирамиды?

б) В правильной четырёхугольной пирамиде с высотой, не меньшей h, расположена полусфера радиуса 1 так, что её касаются все боковые грани пирамиды, а центр полусферы лежит на основании пирамиды. Найдите наименьшее возможное значение полной поверхности такой пирамиды.

10.10. Периметр равнобедренного треугольника равен P. Каковы должны быть длины его сторон, чтобы объём фигуры, полученной вращением этого треугольника вокруг основания, был наибольшим?

10.11. Плоскость проходит через сторону основания правильной четырёхугольной пирамиды и делит пополам двугранный угол при этой стороне. Найдите площадь основания пирамиды наименьшего объёма, если известно, что указанная плоскость пересекает высоту пирамиды в точке, удалённой на расстояние d от плоскости основания.

10.12. Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани AA_1D_1D и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.

а) Один из таких отрезков проведён через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM:AD_1=2:3$. Найдите его длину.

б) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

10.13. а) Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — квадрат $ABCD$. Найдите наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

б) В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ найдите наибольшую возможную величину угла между прямой SA и плоскостью SBC.

10.14. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$ и $BC=4$. Высота OO_1 параллелепипеда равна 4 (O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно). Сфера радиуса 3 с центром на высоте OO_1 касается плоскости основания. Найдите сумму квадратов расстояний от точки, принадлежащей сфере, до всех вершин параллелепипеда при условии, что она максимальна.

10.15. а) Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 4, а боковое ребро равно 3. На ребре BB_1 взята точка F, а на ребре CC_1 — точка G так, что $B_1F = 1$, $CG = \frac{2}{3}$. Точки E и D — середины рёбер AC и B_1C_1 соответственно. Найдите наименьшее возможное значение суммы $EP + PQ$, где точка P принадлежит отрезку A_1D, а точка Q — отрезку FG.

б) На ребре BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка F так, что $B_1F = \frac{1}{3}BB_1$, на ребре C_1D_1 — точка E так, что $D_1E = \frac{1}{3}C_1D_1$. Какое наибольшее значение может принимать отношение $\frac{AP}{PQ}$, где точка P лежит на луче DE, а точка Q — на прямой A_1F?

10.16. Основание пирамиды — квадрат. Высота пирамиды пересекает диагональ основания. Найдите наименьший объём такой пирамиды, если периметр диагонального сечения, содержащего высоту пирамиды, равен 5.

10.17. Рассматриваются всевозможные параллелепипеды с четырьмя рёбрами длины 3 и остальными рёбрами длины 2, в которые можно вписать шар. Найдите максимальное значение радиуса этих шаров.