

Часть 7. Метод координат в пространстве

- 7.1. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите плоскость, параллельную плоскости $2x - y - 3z + 5 = 0$.
- 7.2. Через середину отрезка с концами в точках $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой, проходящей через точки $A(0; -2; -1)$ и $B(3; 2; -1)$.
- 7.3. Проведите плоскость через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.
- 7.4. Найдите угол между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.
- 7.5. Составьте параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $M(-2; 0; 3)$ перпендикулярно плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $P(-1; 2; 5)$ и $Q(3; -4; 1)$.
- 7.6. Через точку $M(-1; -1; 2)$ проведите плоскость, перпендикулярную прямой пересечения плоскостей $x - 2y + z - 13 = 0$ и $x + 2y - 2z + 2 = 0$.
- 7.7. Найдите расстояние от точки $D(1; 3; 2)$ до плоскости, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$, $B(2; 1; -1)$ и $C(-2; 2; 0)$.
- 7.8. Составьте параметрические уравнения прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.
- 7.9. Найдите угол между плоскостями $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$.
- 7.10. Найдите угол между прямой пересечения плоскостей $2x - y - 3z + 5 = 0$ и $x + y - 2 = 0$ и плоскостью, проходящей через точки $M(-2; 0; 3)$, $N(0; 2; 2)$ и $K(3; -3; 1)$.
- 7.11. Через прямую $\frac{x-1}{2} = -\frac{y}{3} = 3-z$ проведите плоскость, параллельную прямой пересечения плоскостей $4x + 5z - 3 = 0$ и $x + y + 2z = 0$.
- 7.12. Найдите расстояние между прямой, проходящей через точки $A(-3; 0; 1)$ и $B(2; 1; -1)$, и прямой, проходящей через точки $C(-2; 2; 0)$ и $D(1; 3; 2)$.
- 7.13. Найдите координаты проекции точки $P(0; 2; 1)$ на прямую $\frac{x-4}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{3}$.
- 7.14. Прямая a — пересечение плоскостей $2x - y - z - 2 = 0$ и $x - y + 2z - 2 = 0$, а прямая b — пересечение плоскостей $x + 3y - z - 2 = 0$ и $x + 2y - 2 = 0$. Пересекаются ли прямые a и b ?
- 7.15. Через точку $M(-2; 0; 3)$ проведите прямую, пересекающую прямые $x = 2 - t$, $y = 3$, $z = -2 + t$ и $\begin{cases} 2x - 2y - z - 4 = 0, \\ x + 3y + 2z + 1 = 0. \end{cases}$
- 7.16. В пространстве даны точки $A(-1; 2; 0)$, $B(5; 2; -10)$, $C(2; -1; 4)$ и $D(-2; 2; -1)$. Найдите:
- расстояние от вершины D тетраэдра $ABCD$ до точки пересечения медиан основания ABC ;
 - уравнение плоскости ABC ;
 - высоту тетраэдра, проведённую из вершины D ;
 - угол между прямыми BD и AC ;
 - угол между гранями ABC и ACD ;
 - расстояние между прямыми BD и AC .
- 7.17. Непересекающиеся диагонали двух смежных граней прямоугольного параллелепипеда наклонены к плоскости основания под углами α и β . Найдите угол между этими диагоналями.
- 7.18. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $BC = 2$, $CC_1 = 4$. На ребре AB взята точка M , причём $AM : MB = 1 : 2$; K — точка пересечения диагоналей грани $CC_1 D_1 D$. Найдите угол и расстояние между прямыми $D_1 M$ и $B_1 K$.
- 7.19. Основание пирамиды $ABCS$ — равносторонний треугольник ABC со стороной $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно 2. Найдите угол и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .
- 7.20. Найдите расстояния между скрещивающимися медианами двух граней правильного тетраэдра со стороной a .
- 7.21. Дан правильный тетраэдр $SABC$ с ребром, равным 1; BD — высота треугольника ABC . Равносторонний треугольник BDE лежит в плоскости, образующей угол φ с ребром AC , причём точки S и E расположены по одну сторону от плоскости ABC . Найдите SE .
- 7.22. В кубе $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, ребро которого равно 6, точки M и N — середины рёбер AB и $B_1 C_1$ соответственно, а точка K расположена на ребре DC так, что $DK = 2KC$. Найдите:
- расстояние от точки N до прямой AK ;
 - расстояние между прямыми MN и AK ;
 - расстояние от точки A_1 до плоскости треугольника MNK .
- 7.23. Площади проекций некоторого треугольника на координатные плоскости Oxy и Oyz равны соответственно $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$, а площадь проекции на плоскость Oxz — целое число. Найдите площадь самого треугольника, если известно, что она также является целым числом.
- 7.24. Основание прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 2$ и $BC = 4$. Высота OO_1 параллелепипеда равна 4 (O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1 B_1 C_1 D_1$ соответственно). Сфера радиуса 3 с центром на высоте OO_1 касается плоскости основания. Найдите сумму квадратов расстояний от точки, принадлежащей сфере, до всех вершин параллелепипеда при условии, что она максимальна.
- 7.25. На рёбрах $A_1 B_1$, AB , $A_1 D_1$ и DD_1 единичного куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты точки K , L , M и N соответственно так, что $A_1 K = \frac{2}{3}$, $AL = \frac{1}{5}$, $A_1 M = \frac{1}{3}$. Определите, какое из рёбер $A_1 D_1$ или $D_1 C_1$ пересекает плоскость, параллельную отрезку ML и содержащую отрезок KN . В каком отношении это ребро делится плоскостью?