

Часть 4. Пирамида и сфера

- 4.1°. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от концов данного отрезка.
- 4.2°. Найдите геометрическое место точек пространства, равноудалённых от вершин данного вписанного многоугольника.
- 4.3°. Для того, чтобы около пирамиды можно было описать сферу необходимо и достаточно, чтобы около основания этой пирамиды можно было описать окружность.
- 4.4. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной, равной a . Высота пирамиды проходит через середину одной из сторон основания и равна $\frac{3a}{2}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды.
- 4.5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Точки M и K — середины рёбер AB и CD соответственно. Найдите радиус сферы, проходящей через точки M , K , A_1 и C_1 .
- 4.6. Дан правильный тетраэдр $PABC$ с ребром, равным a . Через точки C , E , M , P , где E — середина AB , а M — середина AC , проведена сфера. Найдите её радиус.
- 4.7°. Известно, что в некоторую пирамиду можно вписать шар. Докажите, что объём этой пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения радиуса этого шара на полную поверхность пирамиды.
- 4.8. Высота PO правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равна 4, а сторона основания $ABCD$ равна 6. Точки M и K — середины отрезков AB и CD . Найдите радиус шара, вписанного в пирамиду $PMKC$.
- 4.9. Две грани треугольной пирамиды — равносторонние треугольники со стороной, равной a . Две другие грани — равнобедренные прямоугольные треугольники. Найдите радиус вписанного в пирамиду шара.
- 4.10. Дана четырёхугольная пирамида, в которую можно вписать сферу, причём центр этой сферы лежит на высоте пирамиды. Докажите, что в основание пирамиды можно вписать окружность.
- 4.11. Шар радиуса r касается всех боковых граней треугольной пирамиды в серединах сторон её основания. Отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром шара, делится пополам точкой пересечения с основанием пирамиды. Найдите объём пирамиды.
- 4.12. Основание пирамиды — ромб со стороной 2 и острым углом 45° . Шар радиуса $\sqrt{2}$ касается каждой боковой грани в точке, лежащей на стороне основания пирамиды. Докажите, что высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба, и найдите объём пирамиды.
- 4.13. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ (S — вершина) со стороной основания a и боковым ребром a . Сфера с центром в точке O проходит через точку A и касается рёбер SB и SD в их серединах. Найдите объём пирамиды $OSCD$.
- 4.14. В треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро SC равно ребру AB и наклонено к плоскости основания ABC под углом 60° . Известно, что вершины A , B , C и середины боковых рёбер пирамиды расположены на сфере радиуса 1. Докажите, что центр этой сферы лежит на ребре AB и найдите высоту пирамиды.
- 4.15. В треугольной пирамиде $ABCD$ известно, что $DC=9$, $DB=AD$, а ребро AC перпендикулярно грани ABD . Сфера радиуса 2 касается грани ABC , ребра DC , а также грани DAB в точке пересечения её медиан. Найдите объём пирамиды.
- 4.16. В треугольной пирамиде $PABC$ боковое ребро PB перпендикулярно плоскости основания ABC , $PB=6$, $AB=BC=\sqrt{15}$, $AC=2\sqrt{3}$. Сфера, центр O которой лежит на грани ABP , касается плоскостей остальных граней пирамиды. Найдите расстояние от центра O сферы до ребра AC .
- 4.17. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Сфера касается прямых AC , B_1C , AB_1 и продолжения ребра BB_1 за точку B . Найдите радиус сферы, если длины ребёр куба равны 1, а точка касания с прямой AC принадлежит грани куба.
- 4.18. Основание четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — прямоугольник $ABCD$. Известно, что $AS=7$, $BS=2$, $CS=6$. Найдите ребро DS .
- 4.19. Четырёхугольная пирамида $SABCD$ вписана в сферу, центр которой лежит в плоскости основания $ABCD$. Диагонали AC и BD основания пересекаются в точке H , причём SH — высота пирамиды. Найдите CS и CD , если $CH=4$, $AS=3\frac{3}{4}$, $AD=3$, $AB=BS$.
- 4.20. Сфера касается рёбер AS , BS , BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K , L , M и N соответственно. Найдите KL , если $MN=7$, $NK=5$, $LN=2\sqrt{29}$ и $KL=LM$.
- 4.21. Сфера касается всех рёбер треугольной пирамиды. Докажите, что отрезки, соединяющие точки касания сферы с противоположными рёбрами, пересекаются в одной точке.
- 4.22. Сфера вписана в четырёхугольную пирамиду $SABCD$, основанием которой является трапеция $ABCD$, а также вписана в правильный тетраэдр, одна из граней которого совпадает с боковой гранью пирамиды $SABCD$. Найдите радиус сферы, если объём пирамиды $SABCD$ равен 64.
- 4.23. Сфера радиуса $\frac{3}{8}$ вписана в четырёхугольную пирамиду $SABCD$, у которой основанием служит ромб $ABCD$, такой, что $\angle BAD=60^\circ$; высота пирамиды, равная 1, проходит через точку K пересечения диагоналей ромба. Докажите, что существует единственная плоскость, пересекающая рёбра основания AB и AD в некоторых точках M и N , таких, что $MN=\frac{4}{5}\sqrt{3}$, касающаяся сферы в точке, удалённой на равные расстояния от точек M и N , и пересекающая продолжение отрезка SK за точку K в некоторой точке E . Найдите длину отрезка SE .
- 4.24. В основании пирамиды $SABC$ лежит треугольник ABC , у которого $AB=15\sqrt{2}$, $BC=20$, а радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен $5\sqrt{5}$. На сторонах треугольника ABC как на диаметрах построены три

сферы, пересекающиеся в точке O . Точка O является центром четвёртой сферы, причём вершина пирамиды S есть точка касания этой сферы с некоторой плоскостью, параллельной плоскости основания ABC . Площадь части четвёртой сферы, которая заключена внутри трёхгранного угла, образованного лучами OA , OB и OC , равна 8π . Найдите объём пирамиды $SABC$.

4.25. Сфера с центром в точке O проходит через вершины A , B и C треугольной пирамиды $ABCD$ и пересекает прямые AD , BD и CD в точках K , L и M соответственно. Известно, что $AD=10$, $BC:BD=3:2$ и $AB:CD=4\sqrt{3}:11$. Проекция точки O на плоскости ABD , BCD и CAD — середины рёбер AB , BC и AC соответственно. Расстояние между серединами рёбер AB и CD равно 13. Найдите периметр треугольника KLM .

4.26. Через вершину нижнего основания единичного куба проведена плоскость, касающаяся вписанного в куб шара. Эта плоскость отсекает от верхнего основания треугольник площади S . Найдите площадь сечения куба этой плоскостью.

4.27°. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке (такой тетраэдр называется *ортоцентрическим*). Докажите, что точка пересечения медиан, высот и центр описанной сферы лежат на одной прямой.