Часть 1. Параллельность в пространстве. Отношение отрезков

1.1. На одной из двух скрещивающихся прямых взяли различные точки A и A_1, на другой — различные точки B и B_1. Верно ли, что AB и A_1B_1 — скрещивающиеся прямые?

1.2. Прямые a и b пересекаются. Докажите, что все прямые, параллельные прямой b и пересекающие прямую a, лежат в одной плоскости.

1.3. Прямая a параллельна плоскости α. Прямая b, параллельная прямой a, проходит через точку M плоскости α. Докажите, что прямая b лежит в плоскости α.

1.4. Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Докажите, что плоскость, проходящая через середины отрезков AD, BD и CD, параллельна плоскости ABC.

1.5. Докажите, что если две пересекающиеся плоскости параллельны некоторой прямой, прямая их пересечения параллельна этой же прямой.

1.6. Даны три попарно пересекающиеся плоскости. Две из трёх прямых пресечения этих плоскостей пересекаются в точке M. Докажите, что третья прямая проходит через точку M.

1.7. Дано несколько прямых в пространстве, каждые две из которых пересекаются. Докажите, что либо все эти прямые лежат в одной плоскости, либо все проходят через одну точку.

1.8. В пространстве проведены три прямые, не лежащие в одной плоскости, но при этом никакие две не являются скрещивающимися. Докажите, что все эти прямые проходят через одну точку либо параллельны.

1.9. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Какая фигура получилась в сечении этой пирамиды плоскостью ABM, где M — точка на ребре SC?

1.10. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться правильный пятиугольник?

1.11. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных рёбер тетраэдра, пересекаются в одной точке.

1.12. Через данную точку пространства проведите прямую, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые.

1.13. Докажите, что через данную точку можно провести единственную плоскость, параллельную двум данным скрещивающимся прямым.

1.14. Найдите геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на двух данных скрещивающихся прямых.

1.15. Основание пирамиды $SABCD$ — произвольный четырёхугольник $ABCD$. Постройте прямую пересечения плоскостей ABS и CDS.

1.16. Докажите, что выпуклый четырёхгранный угол можно пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

1.17. Точки M и N лежат соответственно на рёбрах BC и AA_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте точку пересечения прямой MN с плоскостью $A_1B_1C_1D_1$.

1.18. Докажите, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через точку пересечения медиан треугольника CB_1D_1 и делится ей в отношении $2:1$, считая от точки A.

1.19. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точки M, N и K — середины рёбер BC, AC и AB соответственно. Докажите, что прямые MA_1, NB_1 и KC_1 пересекаются в одной точке.

1.20. Докажите, что медианы тетраэдра (отрезки, соединяющие вершины с точками пересечения медиан противолежащих граней) пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении $3:1$, считая от вершины.

1.21. Дан произвольный трёхгранный угол. Рассматриваются три плоскости, каждая из которых проведена через ребро и биссектрису противолежащей грани. Верно ли, что эти три плоскости пересекаются по одной прямой?

1.22. Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, параллельная прямым AB и CD. В каком отношении эта плоскость делит медиану, проведённую к стороне CD треугольника ACD?

1.23. Пусть A, B, C и D — четыре точки, не лежащие в одной плоскости. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан треугольников ABC, ABD и BCD, делит отрезок BD?

1.24. Точка M — середина ребра AD тетраэдра $ABCD$. Точка N лежит на продолжении ребра AB за точку B, точка K — на продолжении ребра AC за точку C, причём $BN=AB$ и $CK=2AC$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит рёбра DB и DC?

1.25. Плоскость, проходящая через середины ребёр AB и CD треугольной пирамиды $ABCD$ делит ребро AD в отношении $3:1$, считая от вершины A. В каком отношении эта плоскость делит ребро BC?

1.26. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведён отрезок, соединяющий вершину A с серединой ребра CC_1. В каком отношении этот отрезок делится плоскостью BDA_1?

1.27. Плоскость пересекает рёбра AB, BD, DC и AC тетраэдра $ABCD$ в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что

$$\frac{AK}{KB}\cdot\frac{BL}{LD}\cdot\frac{DM}{MC}\cdot\frac{CN}{NA}=1.$$

1.28. Дан тетраэдр $ABCD$. Точки M, N и K лежат на рёбрах AD, BC и DC соответственно, причём $AM:MD=1:3$, $BN:NC=1:1$ и $CK:KD=1:2$. Постройте сечение тетраэдра плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

1.29. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, K — середины рёбер AB, BC и DD_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро CC_1 и диагональ DB_1?

1.30. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — трапеция $ABCD$. Отношение оснований AD и BC этой трапеции равно 2. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку D и середины рёбер SA и SB. В каком отношении эта плоскость делит ребро SC?

1.31. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Точки M, N и K лежат на рёбрах AS, BS и CS соответственно, причём $AM:MS=1:2$, $BN:NS=1:3$, $CK:KS=1:1$. Постройте сечение пирамиды плоскостью MNK. В каком отношении эта плоскость делит ребро SD?

1.32. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точки M, N, K лежат на рёбрах AB, CC_1 и A_1D_1 соответственно. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью MNK.

1.33. На трёх гранях параллелепипеда взято по точке. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через эти точки.

1.34. На плоскости даны три луча с общим началом. Они делят плоскость на три части, в которых взято по точке. С помощью циркуля и линейки постройте треугольник, вершины которого лежат на данных лучах, а стороны проходят через данные точки.

1.35. Постройте сечение треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через точки A_1 и C параллельно прямой BC_1. В каком отношении эта плоскость делит ребро AB?

1.36. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$, основание которой — параллелограмм $ABCD$. Через середину ребра AB проведите плоскость, параллельную прямым AC и SD. В каком отношении эта плоскость делит ребро SB?

1.37. Пусть M и N — точки пересечения медиан граней ABD и BCD тетраэдра $ABCD$. Найдите MN, если известно, что $AC=a$.

1.38. Через вершину C тетраэдра $ABCD$ и середины рёбер AD и BD проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок MN, где M и N — середины рёбер AB и CD соответственно?

1.39. В тетраэдре $ABCD$ через середину M ребра AD, вершину C и точку N ребра BD такую, что $BN:ND=2:1$, проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит отрезок KP, где K и P — середины рёбер AB и CD соответственно?

1.40. Пусть M — точка пересечения медиан основания ABC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$; N и K — точки пересечения диагоналей граней AA_1C_1C и BB_1C_1C соответственно. Плоскость MNK пересекает прямые B_1C_1 и CC_1 в точках P и Q соответственно. Постройте сечение призмы плоскостью MNK и найдите отношения $B_1P:B_1C_1$ и $C_1Q:CC_1$.

1.41. Через середины M и N ребёр AD и CC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость параллельно диагонали DB_1. Постройте сечение параллелепипеда этой плоскостью. В каком отношении она делит ребро BB_1?

1.42. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на прямых AC и BA_1 взяты точки K и M так, что $KM \parallel DB_1$. Найдите отношение $KM:DB_1$.

1.43. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точки M и N — середины рёбер BB_1 и CC_1. Через точку O пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая, пересекающая прямые MN и AB_1 в точках P и Q соответственно. Найдите отношение $PQ:OQ$.

1.44. В тетраэдре $ABCD$ проведены медианы AM и DN граней ACD и ADB. На этих медианах взяты соответственно точки E и F так, что EF параллельно BC. Найдите отношение $EF:BC$.

1.45. В призме $ABCA_1B_1C_1$ медианы оснований ABC и $A_1B_1C_1$ пересекаются соответственно в точках O и O_1. Через середину отрезка OO_1 проведена прямая, параллельная прямой CA_1. Найдите длину отрезка этой прямой, лежащего внутри призмы, если $CA_1=a$.

1.46. На ребре AD и диагонали A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взты соответственно точки M и N так, что прямая MN параллельна плоскости BDC_1 и $AM:AD=1:5$. Найдите отношение $CN:CA_1$.

1.47. Дан тетраэдр $ABCD$. В каком отношении плоскость, проходящая через точки пересечения медиан граней ABC, ABD и BCD, делит ребро BD?

1.48. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$; M — середина AB, N — середина SC. В каком отношении плоскость BSD делит отрезок MN?