

### Часть 30. Задачи на максимум и минимум

**30.1.** В прямоугольном треугольнике  $ABC$  катет  $BC$  равен  $a$  и образует с гипотенузой  $AC$  угол  $\alpha$ . Точка  $D$  расположена на катете  $BC$  и имеет наименьшую по сравнению с остальными точками отрезка  $BC$  сумму квадратов расстояний до прямых  $AC$  и  $AB$ . Найдите  $BD$ .

**30.2.** При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом  $30^\circ$  и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

**30.3.** Докажите, что среди всех треугольников с заданным основанием и высотой, опущенной на это основание, наибольший противоположный угол имеет равнобедренный треугольник.

**30.4.** Через вершину  $A$  остроугольного треугольника  $ABC$  проведите прямую так, чтобы она не пересекала сторону  $BC$  и чтобы сумма расстояний до неё от вершин  $B$  и  $C$  была наибольшей.

**30.5.** На продолжении биссектрисы  $AL$  треугольника  $ABC$  за точку  $A$  взята такая точка  $D$ , что  $AD = 10$ , и  $\angle BDC = \angle BAL = 60^\circ$ . Найдите площадь треугольника  $BDC$ . Какова наименьшая площадь треугольника  $BDC$  при данных условиях?

**30.6.** Периметр треугольника  $ABC$  равен  $2p$ . Касательная к вписанной окружности треугольника, проведённая параллельно стороне  $BC$ , пересекает стороны  $AB$  и  $AC$  в точках  $M$  и  $N$ . Найдите наименьшую длину отрезка  $MN$ . Каковы при этом стороны треугольника?

**30.7.** Рассматриваются треугольники  $KLM$ , у которых радиус описанной окружности равен 10, сторона  $KL$  равна 16, высота  $MH$  равна  $\frac{39}{10}$ . Найдите угол  $KLM$  того треугольника, медиана  $MN$  которого наименьшая.

**30.8.** Площадь треугольника  $ABC$  равна 10. Какое наименьшее значение может принимать радиус окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , если известно, что середины высот этого треугольника лежат на одной прямой?

**30.9.** Пусть  $R$  и  $r$  — радиусы соответственно описанной и вписанной окружностей треугольника. Докажите, что  $R \geq 2r$ . Для какого треугольника достигается равенство?

**30.10.** Постройте точку, сумма квадратов расстояний от которой до вершин данного треугольника минимальна.

**30.11.** Дана окружность и её хорда  $AB$ . Постройте на дуге  $AB$  точку, для которой периметр треугольника  $ABC$  наибольший.

**30.12.** а) Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой. Постройте на этой прямой точку  $M$ , для которой сумма  $AM + MB$  минимальна.

б) Точки  $A$  и  $B$  лежат по разные стороны от прямой. Постройте на этой прямой точку  $M$ , для которой величина  $|AM - BM|$  максимальна.

**30.13.** Через данную точку, лежащую внутри данного угла, проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник: а) наименьшей возможной площади; б) наименьшего возможного периметра.