

27.1. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки M и N так, что $MN \parallel BC$. На отрезке MN взята точка P так, что $MP = \frac{1}{3}MN$. Прямая AP пересекает сторону BC в точке Q . Докажите, что $BQ = \frac{1}{3}BC$.

27.2. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и отношению катетов.

27.3. Постройте прямоугольный треугольник по данному отношению одного катета к гипотенузе и второму катету.

27.4. На плоскости даны точки A и B и прямая l . По какой траектории движется точка пересечения медиан треугольников ABC , если точка C движется по прямой l ?

27.5. На основаниях трапеции как на сторонах построены во внешнюю сторону два квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

27.6. Постройте трапецию, если даны: отношение её оснований, два угла при одном из этих оснований и высота.

27.7. Даны два отрезка, лежащие либо на одной прямой, либо на двух параллельных. Сколько существует гомотетий, переводящих эти отрезки друг в друга?

27.8. Докажите, что две касающиеся окружности гомотетичны относительно их точки касания.

27.9. Две окружности касаются в точке K . Прямая, проходящая через точку K , пересекает эти окружности в точках A и B . Докажите, что касательные к окружностям, проведённые через точки A и B , параллельны.

27.10. Сколько существует гомотетий, переводящих друг в друга две окружности?

27.11. Постройте общую касательную к двум данным окружностям.

27.12. Найдите геометрическое место середин отрезков, соединяющих данную точку, лежащую вне данной окружности, с точками этой окружности.

27.13. Через данную точку проведите секущую к данной окружности так, чтобы внешняя часть секущей была равна внутренней.

27.14. Постройте хорду данной окружности, которую два данных радиуса разделили бы на три равные части.

27.15. Через точку M , лежащую на данной окружности, проведите хорду, которая данной хордой AB делилась бы пополам.

27.16. Постройте окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности в данной на ней точке.

27.17. Постройте окружность, касающуюся данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

27.18. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и окружности.

27.19. В данный треугольник впишите квадрат так, чтобы одна сторона квадрата была расположена на стороне треугольника, а остальные вершины квадрата лежали на двух других сторонах треугольника.

27.20. Два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, площади которых равны S_1 и S_2 , расположены так, что лучи A_1B_1 и A_2B_2 , B_1C_1 и B_2C_2 , C_1A_1 и C_2A_2 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 .

27.21. На окружности фиксированы точки A и B , а точка C движется по этой окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC .

27.22. Вершины K и N треугольника KMN перемещаются соответственно по сторонам AB и AC угла BAC , а стороны треугольника KMN соответственно параллельны трём данным прямым. Найдите геометрическое место вершин M .

27.23. Через точку D , взятую на стороне AB треугольника ABC , проведена прямая, параллельная AC , и пересекающая сторону BC в точке E . Докажите, что AE , CD и медиана, проведённая через вершину B , пересекаются в одной точке.

27.24. В данный параллелограмм впишите ромб так, чтобы стороны ромба были параллельны диагоналям параллелограмма, а вершины ромба лежали бы на сторонах параллелограмма.

27.25. В данный треугольник впишите другой треугольник, стороны которого соответственно параллельны трём данным прямым.

27.26. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $AM = MN = NC$.

27.27. Впишите в треугольник две равные окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника и другой окружности.

27.28. Постройте треугольник ABC , если заданы его наименьший угол $\angle A$ и отрезки длин $d = AB - BC$ и $e = AC - BC$.

27.29. Впишите в данный угол окружность, проходящую через данную внутри угла точку.

27.30. Впишите в данный угол окружность, касающуюся данной окружности.

27.31. Прямая Эйлера. Докажите, что точка пересечения медиан, ортоцентр и центр описанной окружности треугольника лежат на одной прямой. (Рассмотрите $H_M^{1/2}$, где M — точка пересечения медиан.)

27.32. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M ; P — произвольная точка. Прямая l_a проходит через точку A параллельно прямой PA_1 , прямые l_b и l_c определяются аналогично. Докажите, что:

а) прямые l_a , l_b и l_c пересекаются в одной точке Q ;

б) точка M лежит на отрезке PQ , причём $PM : MQ = 1 : 2$.

27.33. Сторона C_1C_2 прямоугольника C_1C_2PR расположена на стороне AB треугольника ABC , сторона B_1B_2 прямоугольника B_1B_2QP — на стороне AC , сторона A_1A_2 прямоугольника A_1A_2RQ — на стороне BC , причём точки P , Q и R лежат внутри треугольника ABC . Докажите, что прямые AP , BR и CQ пересекаются в одной точке.

27.34. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны AC в точке D , DM — её диаметр. Прямая BM пересекает сторону AC в точке K . Докажите, что $AK = DC$.

27.35. В треугольник площади S вписан второй треугольник площади P и описан третий треугольник площади Q , причём стороны третьего треугольника соответственно параллельны сторонам второго. Докажите, что $S = \sqrt{PQ}$.

27.36. В треугольнике ABC через середину M стороны BC и центр O вписанной в этот треугольник окружности проведена прямая MO , которая пересекает высоту AH в точке E . Докажите, что отрезок AE равен радиусу вписанной окружности.

27.37. Рассмотрим всевозможные пары касающихся внешним образом окружностей, вписанных в круговой сегмент. Докажите, что общие внутренние касательные каждой такой пары проходят через одну точку.

27.38. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N . В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C . Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD .

27.39. В полукруг помещены две окружности диаметром d и D ($d < D$) так, что каждая окружность касается дуги и диаметра полукруга, а также другой окружности. Через центры окружностей проведена прямая, пересекающая продолжение диаметра полукруга в точке M . Из точки M проведена касательная к дуге полукруга (N — точка касания). Найдите MN .

27.40. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник наименьшего возможного периметра.

27.41. Опустим из любой точки P биссектрисы угла A треугольника ABC перпендикуляры PA_1 , PB_1 , PC_1 на его стороны BC , CA и AB соответственно. Пусть R — точка пересечения прямых PA_1 и B_1C_1 . Докажите, что прямая AR делит сторону BC пополам.

27.42. Равные окружности S_1 и S_2 касаются внутренним образом окружности S в точках A_1 и A_2 . Пусть C — некоторая точка окружности S , прямые A_1C и A_2C пересекают окружности S_1 и S_2 в точках B_1 и B_2 соответственно. Докажите, что $B_1B_2 \parallel A_1A_2$.

27.43. На плоскости расположены три окружности S_1 , S_2 , S_3 радиусов r_1 , r_2 , r_3 — каждая вне двух других, причём $r_1 > r_2$ и $r_1 > r_3$. Из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_2 проведены касательные к окружности S_3 , а из точки пересечения внешних касательных к окружностям S_1 и S_3 проведены касательные к окружности S_2 . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырёхугольник, в который можно вписать окружность, и найдите её радиус.

27.44. На отрезках AB , BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2 , BCC_1B_2 и CAA_1C_2 . Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 , вставленные в их середины, пересекаются в одной точке.

27.45. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника, S — его описанная окружность, S' — окружность, проходящая через середины сторон треугольника. Докажите, что $H_M^{-1/2}(S) = S'$.

27.46. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

27.47. Три прямые, каждая из которых проходит через вершину треугольника и точку касания невписанной окружности с противоположной стороной, пересекаются в одной точке (почему?). Она называется *точкой Нагеля* треугольника. Пусть Q — центр вписанной окружности треугольника, M — точка пересечения медиан, N — точка Нагеля. Докажите, что точки Q , M и N лежат на одной прямой, причём $MN : MQ = 2 : 1$.

27.48. Пусть S — описанная окружность треугольника, H — его ортоцентр, M — точка пересечения медиан. Докажите, что $H_H^{1/2}(S) = H_M^{-1/2}(S)$.

27.49. Пусть s — вписанная окружность треугольника, N — точка Нагеля, M — точка пересечения медиан. Докажите, что $H_N^{1/2}(s) = H_M^{-1/2}(s)$.

27.50. Докажите, что окружность $s' = H_N^{1/2}(s)$ касается средних линий треугольника ABC , а также сторон треугольника с вершинами в серединах отрезков AN , BN и CN .

27.51. Теорема о центрах трёх гомотетий. Общие внешние касательные к окружностям S_1 и S_2 , S_2 и S_3 , S_1 и S_3 пересекаются в точках A , B и C соответственно. Докажите, что точки A , B и C лежат на одной прямой.