

Часть 25. Поворот

- 25.1°.** Докажите, что треугольник ABC является правильным тогда и только тогда, когда при повороте на 60° (либо по часовой стрелке, либо против) относительно точки A вершина B переходит в C .
- 25.2.** Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат.
- 25.3.** Пусть две прямые пересекаются в точке O под углом α . Докажите, что при повороте на угол α (в одном из направлений) относительно произвольной точки, отличной от O , одна из этих прямых перейдёт в прямую, параллельную другой.
- 25.4.** На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ постройте точки M и N так, чтобы угол при вершине A равнобедренного треугольника MAN имел данную величину α .
- 25.5.** Пусть M и N — середины сторон CD и DE правильного шестиугольника $ABCDEF$. Найдите угол между прямыми AM и BN .
- 25.6.** Шестиугольник $ABCDEF$ — правильный, K и M — середины отрезков BD и EF . Докажите, что треугольник AMK — правильный.
- 25.7.** Постройте равносторонний треугольник ABC так, чтобы его вершины лежали на трёх данных параллельных прямых.
- 25.8.** Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежала бы на данной окружности, другая — на данной прямой, а третья — в данной точке.
- 25.9.** Постройте квадрат три вершины которого лежали бы на трёх данных параллельных прямых.
- 25.10.** Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной прямого угла в данной точке и с вершинами острых углов на двух данных окружностях.
- 25.11.** Точка P лежит внутри равностороннего треугольника ABC . Докажите, что существует треугольник стороны которого равны отрезкам PA , PD и PC .
- 25.12.** Впишите квадрат в данный параллелограмм.
- 25.13.** На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE ; M и P — середины отрезков AD и BE . Докажите, что треугольник CPM — равносторонний.
- 25.14.** Дан ромб $ABCD$ с острым углом A , равным 60° . Прямая MN отсекает от сторон AB и BC отрезки MB и NB , сумма которых равна стороне ромба. Найдите углы треугольника MDN .
- 25.15.** Теорема Помпею. На дуге BC окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC , взята произвольная точка M . Докажите, что $AM = BM + CM$.
- 25.16.** Два квадрата $BCDA$ и $BKMN$ имеют общую вершину B . Докажите, что медиана BE треугольника ABK и высота BF треугольника CBN лежат на одной прямой. (Вершины обоих квадратов перечислены по часовой стрелке).
- 25.17.** На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K соответственно, причём $\angle BAM = \angle MAK$. Докажите, что $BM + KD = AK$.
- 25.18.** Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P , соответственно. Точка D — центр правильного треугольника PMB , точка E — середина отрезка AP . Найдите углы треугольника DEC .
- 25.19.** На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники ABC_1 , AB_1C и A_1BC . Пусть P и Q — середины отрезков A_1B_1 и A_1C_1 . Докажите, что треугольник APQ — правильный.
- 25.20.** Внутри квадрата $A_1A_2A_3A_4$ взята точка P . Из вершины A_1 опущен перпендикуляр на A_2P , из A_2 — на A_3P , из A_3 — на A_4P , из A_4 — на A_1P . Докажите, что все четыре перпендикуляра (или их продолжения) пересекаются в одной точке.
- 25.21.** Из вершины A квадрата $ABCD$ внутрь квадрата проведены два луча, на которые опущены перпендикуляры BK , BL , DM , DN из вершин B и D . Докажите, что отрезки KL и MN равны и перпендикулярны друг другу.
- 25.22.** Даны две точки и окружность. через данные точки проведите две секущие, отрезки которых внутри данной окружности были бы равны и пересекались бы под данным углом α .
- 25.23.** На сторонах треугольника ABC построены вне треугольника равносторонние треугольники BCA_1 , CAB_1 , ABC_1 , и проведены отрезки AA_1 , BB_1 и CC_1 . Докажите, что эти отрезки равны между собой.
- 25.24.** Точка M лежит внутри квадрата $ABCD$, а точка K — вне, причём треугольники AMD и CKD — равносторонние. Докажите, что точки B , M и K лежат на одной прямой.
- 25.25.** Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, причём $AP:BP:CP = 1:2:3$. Найдите угол APB .
- 25.26.** Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные их вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат.
- 25.27.** Дан треугольник ABC . На его сторонах AB и BC построены внешним образом квадраты $ABMN$ и $BSPQ$. Докажите, что центры этих квадратов и середины отрезков MQ и AC образуют квадрат.
- 25.28.** Задача Ферма. Внутри остроугольного треугольника найдите точку, сумма расстояний от которой до вершин минимальна.