Часть 20. Скалярное произведение на плоскости

20.1. Докажите следующие свойства скалярного произведения:

а) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;

б) $\alpha\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha(\vec{a} \cdot \vec{b})$;

в) $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$;

г) $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

д) скалярное произведение двух ненулевых векторов равно произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\varphi$;

е) $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \vec{b}^2$;

ж) $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2$, причём равенство достигается тогда и только тогда, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны;

з) ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

20.2. Даны точки $A(1; 5)$, $B(-3; -3)$ и $C(5; 1)$. Найдите: а) угол между медианами треугольника ABC, проведёнными из вершин A и C; б) угол между медианой BM и стороной AC.

20.3. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 45°. Известно, что $|\vec{a}| = 1$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2}$. Найдите: а) длину вектора $3\vec{a} - \vec{b}$; б) косинус угла между векторами $3\vec{a} - \vec{b}$ и $2\vec{a} + \vec{b}$.

20.4. Даны три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Докажите, что вектор $\vec{c}$ перпендикулярен вектору $(\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$.

20.5. Докажите, что разность квадратов соседних сторон параллелограмма меньше произведения его диагоналей.

20.6. На стороне BC треугольника ABC взята точка M, причём $BM : MC = 3 : 2$. Известно, что $BC = 15$, $AC = 10$, $AB = 8$. а) Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. б) Найдите длину отрезка AM.

20.7. Стороны треугольника равны a, b и c. Найдите: а) медианы треугольника; б) биссектрису треугольника, проведённую к стороне, равной a.

20.8. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до двух противоположных вершин прямоугольника равна сумме квадратов расстояний от этой точки до двух других вершин.

20.9. Пусть A, B, C, D — произвольные точки. Докажите, что $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Пользуясь эти равенством, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

20.10. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка M лежит на диагонали AC, причём $AM : MC = 3 : 1$. Докажите, что $\angle KMD = 90^\circ$.

20.11. На сторонах AB и AC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AMNB$ и $CKLA$. Докажите, что медиана AP треугольника ABC перпендикулярна прямой ML.

20.12. $ABCD$ — вписанный четырёхугольник, $AB > CD$, $BC > AD$. На сторонах AB и BC отмечены точки X и Y так, что $AX = CD$ и $AD = CY$; M — середина XY. Докажите, что угол AMC — прямой.

20.13. Пусть α, β, γ — углы треугольника. Докажите, что:

а) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leqslant \dfrac{3}{2}$;

б) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

Когда достигаются равенства?

20.14. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ равны и перпендикулярны. Точки P, Q, R и S лежат на сторонах AB, BC, CD и DA соответственно, причём $AP{:}PB = BQ{:}QC = CR{:}RD = DS{:}SA$. Докажите, что $PR \perp QS$ и $PR = QS$.

20.15. Пусть a, b, c — стороны треугольника, R — радиус описанной окружности. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 9R^2$.

20.16. Пусть O — центр окружности, описанной около равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$), D — середина стороны AB, а E — точка пересечения медиан треугольника ACD. Докажите, что $OE \perp CD$.

20.17. В треугольнике ABC известно, что AA_1 — медиана, AA_2 — биссектриса, K — такая точка на AA_1, для которой $KA_2 \parallel AC$. Докажите, что $AA_2 \perp KC$.

20.18. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций: а) $f(x) = 3\sin x + 4\cos x$; б) $f(x) = 4\sqrt{1-x} + 3\sqrt{x}$.

20.19. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H — точка пересечения высот треугольника ABC.

20.20. Пусть r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, d — расстояние между их центрами. Докажите, что $d^2 = R^2 - 2rR$ (*формула Эйлера*).

20.21. Докажите, что точка, для которой сумма квадратов расстояний до вершин треугольника минимальна, есть точка пересечения медиан треугольника.