

Для любых трёх точек A , B и C верны равенства $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ и $\vec{AB} = \vec{CB} - \vec{CA}$.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, где k — некоторое число. Любой вектор можно единственным образом разложить по двум неколлинеарным векторам.

19.1. Пусть M — середина отрезка AB , O — произвольная точка. Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$.

19.2. Даны точки $A(1; -1)$, $B(-5; 1)$, $C(3; 2)$. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, а также координаты векторов $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.

19.3. Точки M и N — расположены соответственно на сторонах AB и AC треугольника ABC , причём $AM:MB = AN:NC = 2:3$. Выразите вектор $\vec{MN}$ через вектор $\vec{CB}$.

19.4. Точка M — середина стороны BC параллелограмма $ABCD$. Выразите вектор $\vec{AM}$ через векторы $\vec{AC}$ и $\vec{BD}$.

19.5. Пусть M — середина отрезка AB , M_1 — середина отрезка A_1B_1 . Докажите, что $\vec{MM_1} = \frac{1}{2}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1})$.

19.6. Точка M расположена на стороне BC треугольника ABC . Известно, что $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$. Найдите вектор $\vec{AM}$, если: а) $BM:MC = 2:5$; б) $BM:MC = m:n$.

19.7. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ известно, что $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AF} = \vec{b}$. Найдите векторы $\vec{AD}$, $\vec{BD}$, $\vec{FD}$ и $\vec{BM}$, где M — середина стороны EF .

19.8. Две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD окружности с центром O пересекаются в точке M . Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

19.9. Проведены четыре радиуса OA , OB , OC и OD окружности с центром O . Докажите, что если $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} = \vec{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

19.10. Пусть AA_1 , BB_1 , CC_1 — медианы треугольника ABC . Докажите, что $\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = \vec{0}$.

19.11. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного треугольника.

19.12. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC , O — произвольная точка. Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})$.

19.13. Докажите, что координаты точки пересечения медиан треугольника равны средним арифметическим координат вершин.

19.14. Пусть M — точка пересечения диагоналей AC и BD параллелограмма $ABCD$, O — произвольная точка. Докажите, что $\vec{OM} = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD})$.

19.15. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы $ABKL$, $BCMN$ и $ACFG$. Докажите, что из отрезков KN , MF и GL можно составить треугольник.

19.16. Пусть $M_1, M_2, \dots, M_6$ — середины сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2 \dots A_6$. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2 , M_3M_4 , M_5M_6 .

19.17. Из медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC составлен треугольник KMN , а из медиан KK_1 , MM_1 и NN_1 треугольника KMN — треугольник PQR . Докажите, что третий треугольник подобен первому и найдите коэффициент подобия.

19.18. Пусть M и N — точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR соответственно. Докажите, что $\vec{MN} = \frac{1}{3}(\vec{AP} + \vec{BQ} + \vec{CR})$.

19.19. Даны два параллелограмма $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, у которых O и O_1 — точки пересечения диагоналей. Докажите равенство $\vec{OO_1} = \frac{1}{4}(\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} + \vec{DD_1})$.

19.20. Пусть точки A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон BC , AC и AB треугольника ABC . Докажите, что для любой точки O выполняется равенство $\vec{OA_1} + \vec{OB_1} + \vec{OC_1} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$.

19.21. Дан треугольник ABC и точка M . Известно, что $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$. Докажите, что M — точка пересечения медиан треугольника ABC .

19.22. Стороны параллелограмма разделены по обходу в равных отношениях. Докажите, что точки деления служат вершинами параллелограмма, а центры симметрии этих параллелограммов совпадают.

19.23. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же отношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника, имеющего вершинами точки деления, совпадают.

19.24. Из произвольной точки M внутри равностороннего треугольника опущены перпендикуляры MK_1 , MK_2 , MK_3 на его стороны. Докажите, что $\vec{MK_1} + \vec{MK_2} + \vec{MK_3} = \frac{3}{2}\vec{MO}$, где O — центр треугольника.

19.25. Точки M , K , N и L — середины сторон AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$ (не обязательно выпуклого), P и Q — середины отрезков MN и KL . Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

19.26. Докажите, что при произвольном выборе точки O равенство $\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OA} + (1-k)\overrightarrow{OB}$ является необходимым и достаточным условием принадлежности различных точек A, B, C одной прямой.

19.27. В треугольнике ABC известно, что $BC = a, AC = b, AB = c, O$ — центр вписанной окружности. Разложите вектор $\overrightarrow{OC}$ по векторам $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

19.28. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие, что $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = \lambda$. Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ .

19.29. Теорема Гамильтона. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC , O — центр описанной окружности. Докажите, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.

19.30. На берегу круглого озера растут шесть сосен. Известно, что если взять такие два треугольника, что вершины одного совпадают с тремя из сосен, а вершины другого — с тремя другими, то в середине отрезка, соединяющего точки пересечения высот этих треугольников, на дне озера находится клад. Неизвестно только, как нужно разбить данные шесть точек на две тройки. Сколько раз придётся опуститься на дно озера, чтобы наверняка отыскать клад?

19.31. На стороне AB треугольника ABC с углом ABC , равным α , расположена точка K , причём $AK = BC$. Пусть P — середина BK , M — середина AC . Найдите угол APM .

19.32. Докажите, что центр описанной окружности, точка пересечения медиан (центроид) и точка пересечения высот (ортоцентр) треугольника лежат на одной прямой (*прямая Эйлера*).

19.33. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC со сторонами $BC = a, AC = b, AB = c$; O — произвольная точка плоскости. Докажите, что $\overrightarrow{OI} = \frac{a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}}{a + b + c}$.

19.34. Пусть O — центр правильного многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, X — произвольная точка плоскости. Докажите, что: а) $\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{XA_1} + \overrightarrow{XA_2} + \dots + \overrightarrow{XA_n} = n\overrightarrow{XO}$.

19.35. Какую линию описывает середина отрезка между двумя пешеходами, равномерно идущими по прямым дорогам?

Дополнительные задачи

19.36. Точки K, N, L, M расположены соответственно на сторонах AB, BC, CD и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$, причём $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC} = \alpha, \frac{AM}{MD} = \frac{BN}{NC} = \beta$. Докажите, что точка пересечения P отрезков KL и MN делит их в тех же отношениях, т. е. $\frac{MP}{PN} = \alpha, \frac{KP}{PL} = \beta$.

19.37. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники ADB, BEC и CFA ($AD:DB = BE:EC = CF:FA = k; \angle ADB = \angle BEC = \angle CFA = \alpha$). Докажите, что:

а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;

б) у этого параллелограмма два угла равны α , а отношение сторон равно k .

19.38. Длины сторон треугольника ABC равны a, b и c ($AB = c, BC = a, CA = b$ и $a < b < c$). На лучах BC и AC отмечены соответственно такие точки B_1 и A_1 , что $BB_1 = AA_1 = c$. На лучах CA и BA отмечены соответственно такие точки C_2 и B_2 , что $CC_2 = BB_2 = a$. Найдите отношение $A_1B_1 : C_2B_2$.

19.39. Докажите, что четыре отрезка, каждый из которых соединяет вершину четырёхугольника с точкой пересечения медиан треугольника, образованного тремя оставшимися вершинами, пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении $3:1$, причём эта точка — середина отрезка, соединяющего середины противоположных сторон четырёхугольника.

19.40. Четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. Пусть H_a — ортоцентр треугольника BCD , M_a — середина отрезка AH_a . Точки M_b, M_c и M_d определяются аналогично. Докажите, что точки M_a, M_b, M_c и M_d совпадают.

19.41. Внеписанные окружности касаются сторон AB и AC треугольника ABC в точках P и Q соответственно. Точка L — середина PQ , точка M — середина BC . Точки L_1 и L_2 симметричны точке L относительно середин отрезков BM и CM соответственно. Докажите, что $L_1P = L_2Q$.

19.42. Из произвольной точки M опущены перпендикуляры $MK_1, \dots, MK_n$ на все стороны правильного n -угольника. Докажите, что $\overrightarrow{MK_1} + \dots + \overrightarrow{MK_n} = \frac{n}{2} \cdot \overrightarrow{MO}$, где O — центр n -угольника.