Часть 14. Пропорциональные отрезки в круге

Теорема. *Произведения отрезков пересекающихся хорд окружности равны.*

Теорема. *Если из одной точки проведены к окружности касательная и секущая, то произведение всей секущей на её внешнюю часть равно квадрату касательной.*

14.1. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, причём $AM=AC$. Докажите, что продолжения высот AA_1 и DD_1 треугольников CAM и BDM пересекаются на окружности.

14.2. Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 1:2. Хорда большей окружности делится меньшей окружностью на три равные части. Найдите отношение этой хорды к диаметру большей окружности.

14.3. Дана точка P, удалённая на расстояние, равное 7, от центра окружности, радиус которой равен 11. Через точку P проведена хорда, равная 18. Найдите отрезки, на которые делится хорда точкой P.

14.4. Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке K, известно, что $AB=a$, $BK=b$, $AK=c$, $CD=d$. Найдите AC.

14.5. Точка M лежит внутри окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой хорды AB этой окружности, проходящей через точку M, произведение $AM\cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

14.6. Точка M лежит вне окружности радиуса R и удалена от центра на расстояние d. Докажите, что для любой прямой, проходящей через точку M и пересекающей окружность в точках A и B, произведение $AM\cdot BM$ одно и то же. Чему оно равно?

14.7. В квадрат $ABCD$ со стороной длины a вписана окружность, которая касается стороны CD в точке E. Найдите величину хорды, соединяющей точки, в которых окружность пересекается с прямой AE.

14.8. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом при вершине C катет BC равен a, радиус вписанной окружности равен r. Вписанная окружность касается катета AC в точке D. Найдите хорду, соединяющую точки пересечения окружности с прямой BD.

14.9. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены к окружности касательная и секущая. Расстояние от точки A до точки касания равно 16, а расстояние от точки A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32. Найдите радиус окружности, если расстояние от центра окружности до секущей равно 5.

14.10. Диагональ AC вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$ является биссектрисой угла BAD. Докажите, что прямая BD отсекает от треугольника ABC подобный ему треугольник.

14.11. Пересекающиеся хорды окружности делятся точкой пересечения в одном и том же отношении. Докажите, что эти хорды равны между собой.

14.12. Каждая из двух равных пересекающихся хорд окружности делится точкой пересечения на два отрезка. Докажите, что отрезки первой хорды соответственно равны отрезкам второй.

14.13. В круге проведены две хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M; K — точка пересечения биссектрисы угла BMD с хордой BD. Найдите отрезки BK и KD, если $BD=3$, а площади треугольников CMB и AMD относятся как $1:4$.

14.14°. Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB=a$, $DB=b$.

14.15. Докажите, что прямая, проходящая через точки пересечения двух окружностей, делит пополам общую касательную к ним.

14.16. В угол вписаны две окружности; одна из них касается сторон угла в точках K_1 и K_2, а другая — в точках L_1 и L_2. Докажите, что прямая K_1L_2 высекает на этих двух окружностях равные хорды.

14.17. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность. Диагональ AC является биссектрисой угла BAD и пересекается с диагональю BD в точке K. Найдите KC, если $BC=4$ и $AK=6$.

14.18. Продолжение медианы треугольника ABC, проведённой из вершины A, пересекает описанную окружность в точке D. Найдите BC, если $AC=DC=1$.

14.19. Окружность делит каждую из сторон треугольника на три равные части. Докажите, что этот треугольник правильный.

14.20. Сторона AD квадрата $ABCD$ равна 1 и является хордой некоторой окружности, причём остальные стороны квадрата лежат вне этой окружности. Касательная BK, проведённая из вершины B к этой же окружности, равна 2. Найдите диаметр окружности.

14.21. Через вершину наибольшего угла треугольника со сторонами 6, 8 и 10 проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника. Найдите отрезок касательной, заключённый между точкой касания и точкой пересечения с продолжением наибольшей стороны треугольника.

14.22. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AB=3$ и $BC=4$ через середины сторон AB и AC проведена окружность, касающаяся катета BC. Найдите длину отрезка гипотенузы AC, который лежит внутри этой окружности.

14.23. Точка B расположена между точками A и C. На отрезках AB и AC как на диаметрах построены окружности. Прямая, перпендикулярная AC и проходящая через точку B, пересекает большую окружность в точке D. Прямая, проходящая через точку C касается меньшей окружности в точке K. Докажите, что $CD=CK$.

14.24. Точка M находится на продолжении хорды AB. Докажите, что если точка C окружности такова, что $MC^2=MA\cdot MB$, то MC — касательная к окружности.

14.25°. Постройте окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной прямой.

14.26. Окружность касается сторон AB и BC треугольника ABC соответственно в точках D и E. Найдите высоту треугольника ABC, опущенную из точки A, если $AB=5$, $AC=2$, а точки A, D, E, C лежат на одной окружности.

14.27. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведены биссектрисы AD, BE, CF. Найдите BC, если известно, что $AC = 1$, а вершина A лежит на окружности, проходящей через точки D, E, F.

14.28. Две окружности внутренне касаются. Прямая, проходящая через центр большей окружности, пересекает её в точках A и D, а меньшую окружность — в точках B и C. Найдите отношение радиусов окружностей, если $AB : BC : CD = 3 : 7 : 2$.

14.29. Точки A, B и C лежат на одной прямой (точка B расположена между точками A и C). Через точки A и B проводятся окружности, а через точку C — касательные к ним. Найдите геометрическое место точек касания.

14.30. Окружность и прямая касаются в точке M. Из точек A и B этой окружности опущены перпендикуляры на прямую, равные a и b соответственно. Найдите расстояние от точки M до прямой AB.

14.31. Из точки A, находящейся на расстоянии, равном 5, от центра окружности радиуса 3, проведены две секущие AKC и ALB, угол между которыми равен $30°$ (K, C, L, B — точки пересечения секущих с окружностью). Найдите площадь треугольника AKL, если площадь треугольника ABC равна 10.

14.32. В окружности проведены три попарно пересекающиеся хорды. Каждая хорда разделена точками пересечения на три равные части. Найдите радиус окружности, если одна из хорд равна a.

14.33. В окружность вписан треугольник. Вторая окружность, концентрическая с первой, касается одной стороны треугольника и делит каждую из двух других сторон на три равные части. Найдите отношение радиусов этих окружностей.

14.34. Хорда AB стягивает дугу окружности, равную $120°$. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.

14.35. Окружность касается сторон AB и AD прямоугольника $ABCD$ и проходит через вершину C. Сторону DC она пересекает в точке N. Найдите площадь трапеции $ABND$, если $AB = 9$ и $AD = 8$.

14.36. Дан угол с вершиной O и окружность, касающаяся его сторон в точках A и B. Из точки A параллельно OB проведён луч, пересекающий окружность в точке C. OC пересекает окружность в точке E. Прямые AE и OB пересекаются в точке K. Докажите, что $OK = KB$.

14.37. Точки A_1 и B_1 принадлежат соответственно сторонам OA и OB угла AOB (не равного $180°$) и $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$. Докажите, что точки A, B, A_1, B_1 принадлежат одной окружности.

14.38. Через точку P, лежащую на общей хорде двух пересекающихся окружностей, проведены хорда KM первой окружности и хорда LN второй окружности. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках K, L, M и N — вписанный.

14.39. Докажите, что квадрат биссектрисы треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, на которые она разделена биссектрисой.

14.40. Две окружности касаются внешним образом. A — точка касания их общей внешней касательной с одной из окружностей, B — точка той же окружности, диаметрально противоположная точке A. Докажите, что длина касательной, проведённой из точки B ко второй окружности, равна диаметру первой окружности.

14.41. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC угол A равен $45°$, угол D равен $30°$. На диагоналях трапеции как на диаметрах построены окружности, пересекающиеся в точках M и N. Хорда MN пересекает основание BC в точке F. Найдите отношение $\frac{BF}{FC}$.

14.42. Постройте окружность, проходящую через две данные точки A и B и касающуюся данной окружности S.

14.43. На плоскости даны три попарно пересекающиеся окружности, центры которых не лежат на одной прямой. Докажите, что три общие хорды каждой пары этих окружностей пересекаются в одной точке.

14.44. На продолжении хорды KL окружности с центром O взята точка A, и из неё проведены касательные AP и AQ; M — середина отрезка PQ. Докажите, что $\angle MKO = \angle MLO$.

14.45. Две окружности, радиусов r и R ($r < R$), внешним образом касаются друг друга. Прямая касается этих окружностей в точках M и N. В точках A и B окружности касаются внешним образом третьей окружности. Прямые AB и MN пересекаются в точке C. Из точки C проведена касательная к третьей окружности (D — точка касания). Найдите CD.

14.46. На боковых сторонах трапеции как на диаметрах построены окружности. Докажите, что отрезки касательных, проведённых из точки пересечения диагоналей трапеции к этим окружностям, равны между собой.

14.47. Из точки A проведены две касательные (M и N — точки касания) и секущая, пересекающая эту окружность в точках B и C, а хорду MN — в точке P. Известно, что $AB : BC = 2 : 3$. Найдите $AP : PC$.

14.48. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность. Расстояния от точки A до прямых BC, DC и DE равны соответственно a, b, c. Найдите расстояние от вершины A до прямой BE.

14.49. *Теорема Птолемея*. Докажите, что если четырёхугольник вписан в окружность, то сумма произведений длин двух пар его противоположных сторон равна произведению длин его диагоналей.

14.50. Через данную точку проведите окружность, касающуюся данной прямой и данной окружности.

14.51. Продолжения противоположных сторон четырёхугольника, вписанного в окружность, пересекаются в точках P и Q. Найдите PQ, если касательные к окружности, проведённые из точек P и Q, равны a и b.

14.52. В треугольнике KLM проведена биссектриса MN. Через вершину M проходит окружность, касающаяся стороны KL в точке N и пересекающая сторону KM в точке P, а сторону LM — в точке Q. Длины отрезков KP, QM и LQ соответственно равны k, m и q. Найдите длину отрезка MN.

14.53. Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. С помощью циркуля и линейки постройте на прямой l такую точку X, что $AX + BX = a$, где a — данная величина.