Часть 12. Теорема Пифагора

Теорема. *Косинус острого угла зависит только от градусной меры угла и не зависит от расположения и размеров треугольника.*

Теорема. *Каждый катет прямоугольного треугольника есть среднее геометрическое гипотенузы и своей проекции на гипотенузу.*

Теорема Пифагора. *Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.*

Теорема. *Синус и тангенс острого угла зависят только от градусной меры угла и не зависят от расположения и размеров треугольника.*

Теорема. *Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла есть среднее геометрическое проекций катетов на гипотенузу.*

12.1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C=90^\circ$) известно, что $\angle A=\alpha$, $BC=a$. Найдите гипотенузу и второй катет.

12.2. Найдите высоту прямоугольного треугольника, проведённую из вершины прямого угла, если гипотенуза равна 8, а один из острых углов равен 60°.

12.3. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 120°, а основание равно 8. Найдите боковые стороны.

12.4. Основания прямоугольной трапеции равны 6 и 8. Один из углов при меньшем основании равен 120°. Найдите диагонали трапеции.

12.5. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, делит гипотенузу на отрезки, равные a и b. Найдите катеты.

12.6. Прямая, проходящая через точку M, удалённую от центра окружности радиуса 10, на расстояние, равное 26, касается окружности в точке A. Найдите AM.

12.7. Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B пересекаются в точке M. Найдите хорду AB, если отрезок MO делится ею на отрезки, равные 2 и 18.

12.8. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите гипотенузу и второй катет.

12.9. Найдите высоту трапеции со сторонами, равными 10, 10, 10 и 26.

12.10. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к основанию, если стороны треугольника равны 10, 13, 13.

12.11°. Найдите высоту и радиусы вписанной и описанной окружностей равностороннего треугольника со стороной, равной a.

12.12. Дан треугольник со сторонами 13, 14, 15. Найдите высоту, проведённую к большей стороне.

12.13. Дан отрезок, равный 1. Постройте отрезки $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$.

12.14°. Даны отрезки a и b. Постройте отрезки $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2-b^2}$.

12.15°. Докажите, что произведение стороны треугольника на проведённую к ней высоту для данного треугольника постоянно.

12.16. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 и 16. Найдите высоту, проведённую из вершины прямого угла.

12.17°. Найдите высоту равнобедренного треугольника, проведённую к боковой стороне, если основание равно a, а боковая сторона равна b.

12.18. Докажите, что в прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

12.19°. Сформулируйте теорему, обратную теореме Пифагора. Верна ли она?

12.20. Найдите высоту трапеции, боковые стороны которой равны 6 и 8, а основания равны 4 и 14.

12.21. Высота ромба, проведённая из вершины тупого угла, делит его сторону на отрезки, равные a и b. Найдите диагонали ромба.

12.22. Большее основание прямоугольной трапеции вдвое больше её меньшего основания, а боковые стороны равны 4 и 5. Найдите диагонали трапеции.

12.23. В прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что одна из его сторон находится на гипотенузе. Боковые отрезки гипотенузы равны a и b. Найдите сторону квадрата.

12.24. В прямоугольный треугольник с углом 60° вписан ромб со стороной, равной 6, так, что угол в 60° у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.

12.25°. Две вершины квадрата расположены на основании равнобедренного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах. Найдите сторону квадрата, если основание треугольника равно a, а угол при основании равен 30°.

12.26. Найдите диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, центр её описанной окружности лежит на большем основании.

12.27. Хорда AC окружности радиуса R образует с диаметром AB угол, равный α. Найдите расстояние от точки C до диаметра AB.

12.28. Диагональ равнобокой трапеции равна a, а средняя линия равна b. Найдите высоту этой трапеции.

12.29. Прямые, содержащие боковые стороны трапеции пересекаются под прямым углом. Большая боковая сторона трапеции равна 8, а разность оснований равна 10. Найдите меньшую боковую сторону.

12.30°. Радиус окружности, вписанной в ромб, равен r, а острый угол ромба равен α. Найдите сторону ромба.

12.31. Отрезок, соединяющий центры двух пересекающихся окружностей, делится их общей хордой на отрезки, равные 5 и 2. Найдите общую хорду, если известно, что радиус одной окружности вдвое больше радиуса другой.

ЯГУбов.РФ

12.32. Из точки M проведены касательные MA и MB к окружности с центром O (A и B — точки касания). Найдите радиус окружности, если $\angle AMB=\alpha$ и $AB=a$.

12.33. Найдите основание равнобедренного треугольника, если его боковая сторона равна a, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середину основания с серединой боковой стороны.

12.34. Сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите остальные стороны треугольника.

12.35. Косинус угла при основании равнобедренного треугольника равен 3/5, высота, опущенная на основание, равна h. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

12.36. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$ со стороной, равной a. Найдите MN.

12.37°. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника, равен R. Угол при основании равен α. Найдите стороны треугольника.

12.38°. Даны отрезки a и b. Постройте отрезок $\sqrt{ab}$.

12.39. Высота CD треугольника ABC делит сторону AB на отрезки AD и BD, причём $AD\cdot BD=CD^2$. Верно ли, что треугольник ABC прямоугольный?

12.40. Найдите $\sin 15^\circ$ и $\operatorname{tg} 75^\circ$.

12.41°. Медианы, проведённые к катетам прямоугольного треугольника, равны a и b. Найдите гипотенузу треугольника.

12.42. Две стороны треугольника равны a и b. Медианы, проведённые к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

12.43. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, которая пересекает гипотенузу AB в точке K. Найдите CK, если $BC=a$ и $AC=b$.

12.44. На боковой стороне равнобедренного треугольника как на диаметре построена окружность, делящая вторую боковую сторону на отрезки, равные a и b. Найдите основание треугольника.

12.45. На катете BC прямоугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая гипотенузу AB в точке D, причём $AD:DB=1:3$. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 3. Найдите катет BC.

12.46. В прямоугольном треугольнике ABC проведена высота из вершины C прямого угла. На этой высоте как на диаметре построена окружность. Известно, что эта окружность высекает на катетах отрезки, равные 12 и 18. Найдите катеты треугольника ABC.

12.47. Высота прямоугольного треугольника, проведённая из вершины прямого угла, равна a и образует угол α с медианой, проведённой из той же вершины. Найдите катеты треугольника.

12.48°. В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12. Найдите катеты треугольника.

12.49. Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом её основании. Найдите все стороны трапеции, если её высота равна 12, а биссектрисы равны 15 и 13.

12.50. Диагональ равнобокой трапеции равна a и образует с большим основанием и боковой стороной углы α и β соответственно. Найдите основания трапеции.

12.51. В трапеции $ABCD$ основание $AD=2$, основание $BC=1$. Боковые стороны $AB=CD=1$. Найдите диагонали трапеции.

12.52. Основания трапеции равны 3 и 5, одна из диагоналей перпендикулярна боковой стороне, а другая делит пополам угол при большем основании. Найдите высоту трапеции.

12.53. Боковая сторона AD и основание CD трапеции $ABCD$ равны a, основание AB равно $2a$, а диагональ AC равна b. Найдите BC.

12.54°. В прямоугольном треугольнике ABC катет AC равен 21, а катет BC равен 28. Окружность, центр O которой лежит на гипотенузе AB, касается обоих катетов. Найдите радиус окружности.

12.55. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника проведён к ней перпендикуляр. Отрезок этого перпендикуляра, заключённый внутри треугольника, равен c, а отрезок, заключённый между одним катетом и продолжением другого, равен $3c$. Найдите гипотенузу.

12.56°. Окружность, вписанная в трапецию, делит её боковую сторону на отрезки a и b. Найдите радиус окружности.

12.57. Окружность радиуса R вписана в прямоугольную трапецию, меньшее основание которой равно $4R/3$. Найдите остальные стороны трапеции.

12.58°. Даны окружности радиусов r и R ($R>r$). Расстояние между их центрами равно a ($a>R+r$). Найдите отрезки общих внешних и общих внутренних касательных, заключённые между точками касания.

12.59. Непересекающиеся окружности S_1, S_2 и S_3 последовательно вписаны в угол, равный 60°. Найдите площадь четырёхугольника с вершинами в точках пересечения со сторонами этого угла общих внутренних касательных окружностей S_1 и S_2 и окружностей S_2 и S_3, если известно, что радиус окружности S_2 равен r, а разность радиусов окружностей S_3 и S_1 равна a.

12.60°. Окружности радиусов r и R ($R>r$) касаются внешним образом в точке K. К ним проведены две общие внешние касательные. Их точки касания с меньшей окружностью — A и D, с большей — B и C соответственно.

а) Найдите AB и отрезок MN общей внутренней касательной, заключённый между внешними касательными.

б) Докажите, что углы AKB и O_1MO_2 — прямые (O_1 и O_2 — центры окружностей).

в) Найдите радиусы окружностей, касающихся обеих данных окружностей и их общей внешней касательной.

12.61. К двум окружностям, касающимся внешним образом в точке C, проведена общая внешняя касательная, A и B — точки касания. Найдите радиусы окружностей, если $AC=6$, $BC=8$.

12.62. В трапеции $ABCD$ меньшая диагональ BD перпендикулярна основаниям AD и BC; сумма острых углов A и C равна 90°. Основания $AD=a$, $BC=b$. Найдите боковые стороны AB и CD.

12.63°. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60°. Найдите высоту трапеции.

12.64°. Стороны параллелограмма равны a и b, а угол между ними равен α. Найдите стороны и диагонали четырёхугольника, образованного пересечением биссектрис внутренних углов параллелограмма.

12.65. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите CN, если катеты равны 1 и 4.

12.66. Основание CD, диагональ BD и боковая сторона AD трапеции $ABCD$ равны p. Боковая сторона BC равна q. Найдите диагональ AC.

12.67°. Хорды AB и CD окружности радиуса R пересекаются под прямым углом. Найдите BD, если $AC=a$.

12.68°. На гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от вершины прямого угла треугольника до центра квадрата.

12.69. Высоты треугольника равны 12, 15 и 20. Докажите что этот треугольник прямоугольный.

12.70°. В круге проведены два диаметра AB и CD, M — некоторая точка. Известно, что $AM=15$, $BM=20$, $CM=24$. Найдите DM.

12.71. Катет прямоугольного треугольника равен 2, а противолежащий ему угол равен 30°. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники, на которые данный треугольник делится медианой, проведённой из вершины прямого угла.

12.72. Найдите расстояние между центром вписанной окружности прямоугольного треугольника с углом 30° и центром его вневписанной окружности, касающейся меньшего катета, если радиус вписанной окружности равен r.

12.73°. Найдите радиусы вписанной и вневписанных окружностей треугольника со сторонами: а) 5, 12, 13; б) 10, 10, 12.

12.74. В треугольнике PQR угол QRP равен 60°. Найдите расстояние между точками касания со стороной QR окружности радиуса 2, вписанной в треугольник, и окружности радиуса 3, касающейся продолжений сторон PQ и PR.

12.75. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен $\sqrt{3}-1$. Угол BAC этого треугольника равен 60°, а радиус окружности, касающейся стороны BC и продолжений сторон AB и AC, равен $\sqrt{3}+1$. Найдите углы ABC и ACB данного треугольника.

12.76°. Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Из конца отрезка OA, пересекающегося с окружностью в точке M, проведена касательная AK к окружности (K — точка касания), $\angle OAK=60^\circ$. Найдите радиус окружности, касающейся отрезков AK, AM и дуги MK.

12.77. Две окружности касаются внешним образом в точке C. Общая внешняя касательная касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая AC пересекает вторую окружность в точке D, отличной от C. Найдите BC, если $AC=9$, $CD=4$.

12.78°. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса R. Его диагонали взаимно перпендикулярны и пересекаются в точке P. Найдите $AP^2+BP^2+CP^2+DP^2$ и $AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

12.79. Три окружности радиусов 1, 2 и 3 попарно касаются внешним образом. Найдите радиус окружности, проходящей через точки касания этих окружностей.

12.80. Вершины прямоугольника, не являющегося квадратом, расположены по одной на каждой стороне некоторого квадрата. Докажите, что стороны прямоугольника параллельны диагоналям квадрата.

12.81. Могут ли три точки с целыми координатами быть вершинами равностороннего треугольника?

12.82°. Найдите геометрическое место точек M, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек A и B постоянна.

12.83°. Найдите геометрическое место точек, касательные из которых, проведённые к двум данным окружностям, равны между собой.

12.84°. Докажите, что прямые AB и CD перпендикулярны тогда и только тогда, когда $AC^2+BD^2=AD^2+BC^2$.

12.85. Используя результат предыдущей задачи, докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

12.86. В четырёхугольник $ABCD$ можно вписать и вокруг него можно описать окружность. Диагонали этого четырёхугольника перпендикулярны. Найдите его площадь, если радиус описанной окружности равен R и $AB=2BC$.

12.87. Прямоугольный треугольник ABC ($\angle A=90^\circ$) и два квадрата $BEFC$ и $AMNB$ расположены так, что точки E и A лежат по разные стороны от прямой BC, а точки M и C — по разные стороны от прямой AB. Найдите расстояние между центрами квадратов, если $AB=b$, $AC=a$.

12.88°. На высотах BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC взяты точки B_2 и C_2 так, что $\angle AB_2C=\angle AC_2B=90^\circ$. Докажите, что $AB_2=AC_2$.