Часть 9. Трапеция. Теорема Фалеса

Трапецией называется четырёхугольник, у которого две противоположные стороны (основания) параллельны, а две другие (боковые стороны) нет.

Теорема о средней линии трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме. Трапеция называется равнобокой, если её боковые стороны равны между собой.

Теорема Фалеса. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной из его сторон равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

9.1°. С помощью циркуля и линейки разделите отрезок на n равных отрезков.

9.2°. Докажите следующие утверждения:

- а) углы при основании равнобокой трапеции равны;
- б) если углы при одном из оснований трапеции равны, то она равнобокая;
- в) диагонали равнобокой трапеции равны;
- г) если диагонали трапеции равны, то она равнобокая.

9.3. Докажите, что сумма противоположных углов равнобокой трапеции равна 180° . Верно ли обратное: если сумма противоположных углов трапеции равна 180° , то она равнобокая?

9.4. Наибольший угол прямоугольной трапеции равен 120° , а большая боковая сторона равна c . Найдите разность оснований.

9.5. Боковые стороны трапеции равны меньшему основанию, а диагонали — большему. Найдите углы трапеции.

9.6°. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из вершины C меньшего основания BC равнобокой трапеции $ABCD$ на её большее основание AD . Найдите DP и AP , если основания трапеции равны a и b ($a > b$).

9.7. Найдите углы и стороны четырёхугольника с вершинами в серединах сторон равнобокой трапеции, диагонали которой равны 10 и пересекаются под углом 40° .

9.8. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны. Докажите, что средняя линия трапеции равна высоте.

9.9. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны, а средняя линия равна 5. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.

9.10. Высота равнобокой трапеции, проведённая из вершины меньшего основания, делит её большее основание на отрезки, равные 4 и 8. Найдите основания трапеции.

9.11. Найдите меньшее основание равнобокой трапеции, если высота, проведённая из вершины меньшего основания, делит большее основание на отрезки, один из которых на 5 больше другого.

9.12. В равнобокой трапеции острый угол равен 60° . Докажите, что меньшее основание равно разности большего основания и боковой стороны.

9.13. Диагональ равнобокой трапеции равна 10 и образует угол, равный 60° , с основанием трапеции. Найдите среднюю линию трапеции.

9.14. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что $AB = 2$, 6 и $BC = 2$, 5 . Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A : основание BC или боковую сторону CD ?

9.15. Расстояния от концов диаметра окружности до некоторой касательной равны a и b . Найдите радиус окружности.

9.16. Окружность касается всех сторон равнобокой трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции равна средней линии.

9.17°. Окружность касается всех сторон трапеции. Докажите, что боковая сторона трапеции видна из центра окружности под прямым углом.

9.18. Боковые стороны трапеции равны 7 и 11, а основания — 5 и 15. Прямая, проведённая через вершину меньшего основания параллельно большей боковой стороне, отсекает от трапеции треугольник. Найдите его стороны.

9.19. Биссектрисы углов при одном основании трапеции пересекаются на втором её основании. Докажите, что второе основание равно сумме боковых сторон.

9.20°. Постройте трапецию по основаниям и боковым сторонам.

9.21°. Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

9.22. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 3, а большая образует угол 30° , с одним из оснований. Найдите это основание, если на нём лежит точка пересечения биссектрис углов при другом основании.

9.23. Точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Могут ли прямые BN и DM быть параллельными?

9.24°. Докажите, что биссектрисы углов при боковой стороне трапеции пересекаются на её средней линии.

9.25. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD . Биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P , а при вершинах C и D — в точке Q . Докажите, что отрезок PQ равен полупериметру трапеции.

9.26. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC . Биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M , а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N . Найдите MN , если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ и $AD = d$.

9.27°. Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции.

9.28. Точка A лежит на одной из двух параллельных прямых, а точка B — на другой. Найдите геометрическое место середин отрезков AB .

- 9.29.** Один из углов прямоугольной трапеции равен 120° , большее основание равно 12. Найдите отрезок, соединяющий середины диагоналей, если известно, что меньшая диагональ трапеции равна её большому основанию.
- 9.30.** Найдите отношение оснований трапеции, если её средняя линия делится диагоналями на три равные части.
- 9.31.** Боковая сторона трапеции равна одному основанию и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона перпендикулярна одной из диагоналей трапеции.
- 9.32.** Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Одна из них равна 6, а вторая образует с основанием угол 30° . Найдите среднюю линию трапеции.
- 9.33.** Сумма углов при одном из оснований трапеции равна 90° . Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен их полуразности.
- 9.34.** Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании трапеции равны 30° и 60° . Найдите основания и меньшую боковую сторону трапеции.
- 9.35.** Точка M — середина отрезка AB . Точки A_1 , M_1 и B_1 соответственно — проекции точек A , M и B на некоторую прямую. Докажите, что M_1 — середина отрезка A_1B_1 .
- 9.36.** На прямую, проходящую через вершину A треугольника ABC опущены перпендикуляры BD и CE . Докажите, что середина стороны BC равноудалена от точек D и E .
- 9.37.** Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке K . Одна прямая касается этих окружностей в различных точках A и B , а вторая — соответственно в различных точках C и D . Общая касательная к окружностям, проходящая через точку K , пересекается с этими прямыми в точках M и N . Найдите MN , если $AC = a$, $BD = b$.
- 9.38.** Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.
- 9.39.** Дана трапеция, в которую можно вписать окружность. Докажите, что окружности, построенные на боковых сторонах как на диаметрах, касаются друг друга.
- 9.40.** Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон. Докажите, что этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.
- 9.41.** Окружность, построенная на большем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины боковых сторон и касается меньшего основания. Найдите углы трапеции.
- 9.42.** Окружность, построенная на меньшем основании трапеции как на диаметре, проходит через середины диагоналей и касается большего основания. Найдите углы трапеции.
- 9.43.** В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ противоположные углы A и C прямые. На диагональ AC опущены перпендикуляры BE и DF . Докажите, что $CE = FA$.
- 9.44.** В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE . Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG . Докажите, что $EF = DG$.
- 9.45.** Одним прямолинейным разрезом отрежьте от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме боковых сторон.
- 9.46.** Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?
- 9.47.** На отрезке AB взята точка C . Прямая, проходящая через точку C , пересекает окружности с диаметрами AC и BC в точках K и L , а также окружность с диаметром AB — в точках M и N . Докажите, что $KM = LN$.