Часть 7. Параллелограмм

Параллелограммом называется четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

Свойства параллелограмма:

а) углы при соседних вершинах параллелограмма составляют в сумме 180°, а углы при противоположных вершинах равны;

б) диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника;

в) противоположные стороны параллелограмма равны;

г) диагонали параллелограмма пересекаются и делятся точкой пересечения пополам.

Признаки параллелограмма:

а) если в четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм;

б) если в четырёхугольнике противоположные углы попарно равны, то это параллелограмм;

в) если в четырёхугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм;

г) если диагонали четырёхугольника делятся точкой их пересечения пополам, то это параллелограмм.

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его центром.

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется прямоугольником.

Диагонали прямоугольника равны. Если диагонали параллелограмма равны, то это прямоугольник.

Параллелограмм, в котором все стороны равны, называется ромбом.

Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами его углов. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то это ромб. Если диагонали параллелограмма делят его углы пополам, то это ромб.

Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется квадратом: у него все стороны равны, а все углы прямые.

7.1. Точки M и N — середины противоположных сторон сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник $AMCN$ — параллелограмм.

7.2. Из произвольной точки основания равнобедренного треугольника с боковой стороной, равной a, проведены прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося четырёхугольника.

7.3. Биссектриса угла параллелограмма делит сторону параллелограмма на отрезки, равные a и b. Найдите стороны параллелограмма.

7.4. Высота параллелограмма, проведённая из вершины тупого угла, равна 2 и делит сторону параллелограмма пополам. Острый угол параллелограмма равен 30°. Найдите меньшую диагональ и углы, которые она образует со сторонами.

7.5. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общую медиану AM. Докажите, что $BC_1 = B_1C$.

7.6. Точки K, L, M и N — середины сторон соответственно AB, BC, CD и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что четырёхугольник с вершинами в точках пересечения прямых AL, BM, CN и DK — параллелограмм.

7.7°. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Докажите, что $ABDC$ — параллелограмм.

7.8. В прямоугольный треугольник впишите прямоугольник с наименьшей диагональю, имеющий с треугольником общий прямой угол.

7.9. а) Докажите, что около любого прямоугольника можно описать окружность. Где расположен её центр?

б) Докажите, что в любой ромб можно вписать окружность. Где расположен её центр?

7.10. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны AB. Биссектрисы углов A и B пересекают прямую CD в точках M и N, причём $MN = 12$. Найдите стороны параллелограмма.

7.11. Квадрат вписан в равнобедренный прямоугольный треугольник, причём одна вершина квадрата расположена на гипотенузе, противоположная ей вершина совпадает с вершиной прямого угла треугольника, а остальные лежат на катетах. Найдите сторону квадрата, если катет треугольника равен a.

7.12. Две вершины квадрата расположены на гипотенузе равнобедренного прямоугольного треугольника, а две другие — на катетах. Найдите сторону квадрата, если гипотенуза равна a.

7.13. На каждой стороне квадрата взяли по одной точке. При этом оказалось, что эти точки являются вершинами прямоугольника, стороны которого параллельны диагоналям квадрата. Найдите периметр прямоугольника, если диагональ квадрата равна 6.

7.14. В данный треугольник ABC впишите ромб, имеющий с треугольником общий угол A.

7.15. Около данной окружности опишите ромб с данным углом.

7.16. Вершины M и N равностороннего треугольника BMN лежат соответственно на сторонах AD и CD квадрата $ABCD$. Докажите, что $MN \parallel AC$.

7.17. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

7.18. Противоположные стороны шестиугольника попарно равны и параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие противоположные вершины пересекаются в одной точке.

7.19. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм, причём его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

7.20. Через центр параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD соответственно в точках M и K, вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм.

7.21°. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, причём $MNKL$ — также параллелограмм. Докажите, центры параллелограммов $ABCD$ и $MNLK$ совпадают.

7.22. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL и DM получится параллелограмм, причём его центр совпадает с центром параллелограмма $ABCD$.

7.23°. Докажите, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

7.24. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D параллелограмма $ABCD$ на диагональ AC. Докажите, что перпендикуляры к прямым AB и BC, проведённые через точки A и C соответственно, пересекутся на прямой DM.

7.25°. Через данную точку внутри угла проведите прямую, отрезок которой, заключённый внутри этого угла, делился бы данной точкой пополам.

7.26. Постройте выпуклый четырёхугольник по данным серединам трёх его равных сторон.

7.27. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит большая диагональ.

7.28. Найдите расстояние от центра ромба до его стороны, если острый угол ромба равен 30°, а сторона равна 4.

7.29. Около данной окружности опишите ромб с данной стороной.

7.30. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

7.31. Через середину диагонали KM прямоугольника $KLMN$ перпендикулярно этой диагонали проведена прямая, пересекающая стороны KL и MN в точках A и B соответственно. Известно, что $AB=BM=6$. Найдите большую сторону прямоугольника.

7.32. В параллелограмме $ABCD$ из вершины тупого угла B на стороны параллелограмма опущены высоты BM и BN, а из вершины D — высоты DP и DQ. Докажите, что точки M, N, P, Q являются вершинами прямоугольника.

7.33. Окружность, построенная на стороне AD параллелограмма $ABCD$ как на диаметре, проходит через вершину B и середину стороны BC. Найдите углы параллелограмма.

7.34. Постройте квадрат по его центру и двум точкам, лежащим на противоположных сторонах.

7.35. Через центр квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами квадрата являются вершинами ещё одного квадрата.

7.36. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $KLMN$ — также квадрат.

7.37. Через произвольную точку внутри квадрата проведены две взаимно перпендикулярные прямые, каждая из которых пересекает две противоположные стороны квадрата. Докажите, что:

а) отрезки этих прямых, заключённые внутри квадрата, равны;

б) сумма периметров любых двух образовавшихся противоположных четырёхугольников равна сумме периметров двух других.

7.38. Прямая имеет с параллелограммом $ABCD$ единственную общую точку B. Вершины A и C удалены от этой прямой на расстояния, равные a и b. На какое расстояние удалена от этой прямой вершина D?

7.39. Докажите, что в любом треугольнике ABC середина стороны BC лежит на отрезке, соединяющем точку пересечения высот с точкой окружности, описанной около этого треугольника, диаметрально противоположной вершине A, и делит этот отрезок пополам.

7.40. Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями биссектрис: а) внутренних углов параллелограмма; б) внешних углов параллелограмма.

7.41. Докажите, что биссектрисы всех четырёх углов прямоугольника (не являющегося квадратом) при пересечении образуют квадрат.

7.42. Через точку, расположенную внутри треугольника, проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разбивают треугольник на три треугольника и три четырёхугольника. Пусть a, b и c — параллельные высоты трёх этих треугольников. Найдите параллельную им высоту исходного треугольника.

7.43. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки основания равнобедренного треугольника до боковых сторон постоянна.

7.44. Через каждую вершину параллелограмма проведена прямая, перпендикулярная диагонали, не проходящей через эту вершину. Докажите, что диагонали четырёхугольника, образованного пересечениями четырёх проведённых прямых, перпендикулярны сторонам параллелограмма.

7.45°. Окружность, построенная на стороне BC треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Отрезки CM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что AP перпендикулярно BC.

7.46°. С помощью одной линейки опустите перпендикуляр из данной точки на данный диаметр данной окружности (точка не лежит ни на окружности, ни на диаметре).

7.47. Три равных окружности проходят через точку M и попарно пересекаются в трёх других точках A, B и C. Докажите, что треугольник ABC равен треугольнику с вершинами в центрах окружностей, а M — точка пересечения высот треугольника ABC.

7.48. Угол при вершине A ромба $ABCD$ равен 60°. На сторонах AB и BC взяты соответственно точки M и N, причём $AM=BN$. Докажите, что треугольник DMN равносторонний.

7.49. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Докажите, что их центры сами образуют квадрат.

7.50. В прямоугольнике $ABCD$ точка M — середина стороны BC, точка N — середина стороны CD, P — точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите, что угол MAN равен углу BPM.

7.51. На прямую, проходящую через вершину A и середину стороны CD параллелограмма $ABCD$, опущен перпендикуляр BH. Докажите, что треугольник BCH равнобедренный.

7.52. Сторона BC параллелограмма $ABCD$ вдвое больше стороны CD, P — проекция вершины C на прямую AB, M — середина стороны AD. Докажите, что $\angle DMP=3\angle APM$.

7.53. На сторонах AB и AC треугольника ABC постройте соответственно точки M и N так, что $BM=AN$ и $MN\parallel BC$.

7.54. На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем всё, кроме этих точек, стёрли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

7.55. Дана линейка с делениями в 1 см. Проведите какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой.

7.56. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Точки K, L, M и N лежат на сторонах AB, BC, CD и AD соответственно, причём точка O лежит на отрезках KM и LN и делит их пополам. Докажите, что $ABCD$ — параллелограмм.