

Часть 6. Геометрические неравенства

Против большей стороны треугольника лежит больший угол.

Против большего угла треугольника лежит большая сторона.

Сумма любых двух сторон треугольника больше третьей стороны (неравенство треугольника).

Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причём $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$. Тогда BC больше B_1C_1 .

Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, причём $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, а BC больше B_1C_1 . Тогда угол BAC больше угла $B_1A_1C_1$.

- 6.1. Докажите, что катет прямоугольного треугольника меньше гипотенузы.
- 6.2. Докажите, что сумма высот треугольника меньше его периметра.
- 6.3. Сколько можно составить треугольников из отрезков, равных: а) 2, 3, 4 и 5; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7?
- 6.4. В треугольнике две стороны равны 1 и 6. Найдите третью сторону, если известно, что её длина равна целому числу.
- 6.5. Докажите, что диаметр есть наибольшая хорда окружности.
- 6.6°. Даны четыре точки A , B , C и D . Докажите, что $AD \leq AB + BC + CD$.
- 6.7. Существует ли четырёхугольник со сторонами, равными: а) 1, 1, 1, 2; б) 1, 2, 3, 6?
- 6.8. Высота прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два неравных угла. Докажите, что катет, прилежащий к меньшему из них, меньше другого катета.
- 6.9. Основание D высоты AD треугольника ABC лежит на стороне BC , причём $\angle BAD > \angle CAD$. Что больше, AB или AC ?
- 6.10. Докажите, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра.
- 6.11. Докажите, что в четырёхугольнике любая диагональ меньше половины периметра.
- 6.12°. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника больше суммы его двух противоположных сторон.
- 6.13. Четыре дома расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника. Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырёх домов была наименьшей?
- 6.14. Докажите, что сумма диагоналей выпуклого четырёхугольника меньше периметра, но больше полупериметра этого четырёхугольника.
- 6.15. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину равнобедренного треугольника с точкой, лежащей на основании, не больше боковой стороны треугольника.
- 6.16. Биссектриса угла при основании BC равнобедренного треугольника ABC пересекает боковую сторону AC в точке K . Докажите, что $BK < 2CK$.
- 6.17°. Две окружности радиусов r и R ($r < R$) пересекаются. Докажите, что расстояние между их центрами: а) меньше, чем $r + R$; б) больше, чем $R - r$.
- 6.18°. а) Точка M расположена на расстоянии a от центра окружности радиуса R . Найдите наибольшее и наименьшее из расстояний от этой точки до точек окружности.
б) Расстояние между центрами окружностей радиусов r и R равно a ($a > r + R$). Найдите наименьшее и наибольшее из расстояний между точками, одна из которых лежит на первой окружности, а другая — на второй.
- 6.19. Докажите, что каждая сторона треугольника видна из центра вписанной окружности под тупым углом.
- 6.20. Верно ли утверждение предыдущей задачи для четырёхугольника, в который можно вписать окружность?
- 6.21. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше угол при вершине, тем меньше высота, опущенная на основание.
- 6.22. Рассмотрим равнобедренные треугольники с одними и теми же боковыми сторонами. Докажите, что чем больше основание, тем меньше проведённая к нему высота.
- 6.23. Докажите, что из двух неравных хорд окружности большая удалена от центра на меньшее расстояние. Верно ли обратное?
- 6.24. Через данную точку внутри круга проведите наименьшую хорду.
- 6.25°. Докажите, что медиана треугольника ABC , проведённая из вершины A , меньше полусуммы сторон AB и AC , но больше их полуразности.
- 6.26. Внутри треугольника ABC взята точка M . Докажите, что $\angle BMC \geq \angle BAC$.
- 6.27. Дан выпуклый n -угольник, все углы которого тупые. Докажите, что сумма его диагоналей больше периметра.
- 6.28. Пусть CK — биссектриса треугольника ABC и $AC > BC$. Докажите, что угол AKC — тупой.
- 6.29. Пусть BD — биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AB > AD$ и $CB > CD$.
- 6.30. В треугольнике ABC сторона AC длиннее стороны BC . Медиана CD делит угол C на два угла. Какой из них больше?
- 6.31. Биссектриса треугольника делит его сторону на два отрезка. Докажите, что к большей из двух других сторон треугольника примыкает больший из них.
- 6.32. AD — биссектриса треугольника ABC , причём $BD > CD$. Докажите, что $AB > AC$.
- 6.33. В треугольнике ABC известно, что угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N (M между B и N) так, что лучи AN и AM делят угол BAC на три равные части. Докажите, что $BM < MN < NC$.
- 6.34. В треугольнике ABC угол B прямой или тупой. На стороне BC взяты точки M и N так, что $BM = MN = NC$. Докажите, что $\angle BAM > \angle MAN > \angle NAC$.

- 6.35.** Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек, расстояние от каждой из которых до точки A больше, чем расстояние до точки B .
- 6.36.** В треугольнике ABC с тупым углом C точки M и N расположены соответственно на сторонах AC и BC . Докажите, что отрезок MN короче отрезка AB .
- 6.37.** Докажите, что если внутри треугольника ABC существует точка D , для которой $AD = AB$, то $AB < AC$.
- 6.38.** Отрезок соединяет вершину треугольника с точкой, лежащей на противоположной стороне. Докажите, что этот отрезок меньше большей из двух других сторон.
- 6.39.** Докажите, что расстояние между любыми двумя точками, взятыми на сторонах треугольника, не больше наибольшей из его сторон.
- 6.40.** В треугольнике ABC на наибольшей стороне BC , равной b , выбирается точка M . Найдите наименьшее расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BAM и ACM .
- 6.41.** На биссектрисе внешнего угла C треугольника ABC взята точка M , отличная от C . Докажите, что $MA + MB > CA + CB$.
- 6.42.** Угол при вершине A треугольника ABC равен 60° . Докажите, что $AB + AC \leq 2BC$.
- 6.43.** Пусть AA_1 — медиана треугольника ABC . Докажите, что угол A острый тогда и только тогда, когда $AA_1 > \frac{1}{2}BC$.
- 6.44.** Точки D и E — середины сторон соответственно AB и BC треугольника ABC . Точка M лежит на стороне AC , причём $ME > EC$. Докажите, что $MD < AD$.
- 6.45.** Даны точки A и B . Найдите геометрическое место точек C таких, что треугольник ABC — остроугольный, причём а) угол C — наибольший; б) угол C — средний по величине угол треугольника ABC .
- 6.46.** Два противоположных угла выпуклого четырёхугольника — тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше другой диагонали.
- 6.47.** Диагональ AC делит вторую диагональ выпуклого четырёхугольника $ABCD$ на две равные части. Докажите, что если $AB > AD$, то $BC < DC$.
- 6.48.** Пусть $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ — два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если $\angle A > \angle A_1$, то $\angle B < \angle B_1$, $\angle C > \angle C_1$, $\angle D < \angle D_1$.
- 6.49.** Точки M и N расположены по одну сторону от прямой l . Постройте на прямой l такую точку K , чтобы сумма $MK + NK$ была наименьшей.
- 6.50.** Точка M лежит внутри острого угла. Постройте на сторонах этого угла точки A и B , для которых периметр треугольника AMB был бы наименьшим.
- 6.51.** Точки M и N расположены по разные стороны от прямой l . Постройте на прямой l такую точку P , чтобы разность отрезков MP и NP была наибольшей.
- 6.52.** Внутри острого угла даны точки M и N . Постройте на сторонах угла точки K и L так, чтобы периметр четырёхугольника $MKLN$ был наименьшим.
- 6.53.** Точка C лежит внутри прямого угла AOB . Докажите, что периметр треугольника ABC больше $2OC$.
- 6.54.** Пусть вписанная окружность касается сторон AC и BC треугольника ABC в точках B_1 и A_1 . Докажите, что если $AC > BC$, то $AA_1 > BB_1$.
- 6.55.** Точка M расположена внутри треугольника ABC . Докажите, что $BM + CM < AB + AC$.
- 6.56.** Докажите, что сумма расстояний от любой точки внутри треугольника до трёх его вершин больше полупериметра, но меньше периметра треугольника.
- 6.57.** Даны n точек A_1, A_2, \dots, A_n и окружность радиуса 1. Докажите, что на окружности можно выбрать точку M так, что $MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \geq n$.
- 6.58.** Высота треугольника в два раза меньше его основания, а один из углов при основании равен 75° . Докажите, что треугольник равнобедренный.
- 6.59.** Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 20° . Докажите, что боковая сторона больше удвоенного основания, но меньше утроенного.
- 6.60.** Сколько сторон может иметь выпуклый многоугольник, все диагонали которого равны?
- 6.61.** В некотором царстве, в некотором государстве есть несколько городов, причём расстояния между ними все попарно различны. В одно прекрасное утро из каждого города вылетает по одному самолёту, который приземляется в соседнем городе. Может ли в одном городе приземлиться более пяти самолётов?
- 6.62.** Шесть кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Докажите, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.
- 6.63.** На плоскости даны n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что можно провести n отрезков с разноцветными концами, не имеющих общих точек.