Часть 4. Касательная к окружности

4.1°. Через точку M проведены две касательные MA и MB к окружности (A и B — точки касания). Докажите, что $MA = MB$.

4.2. Хорда большей из двух концентрических окружностей касается меньшей. Докажите, что точка касания делит эту хорду пополам.

4.3°. Докажите, что центр окружности, вписанной в угол, расположен на его биссектрисе.

4.4. Две прямые касаются окружности с центром O в точках A и B и пересекаются в точке C.

а°) Докажите, что прямая CO перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.

б) Найдите угол между прямыми CA и CB, если $\angle ABO = 40^\circ$.

4.5°. Окружность касается двух параллельных прямых и их секущей. Докажите, что отрезок секущей, заключённый между параллельными прямыми, виден из центра окружности под прямым углом.

4.6. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. В треугольники ABD и ACD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2. Докажите, что отрезок O_1O_2 виден из точки D под прямым углом.

4.7. Центр окружности, описанной около треугольника, совпадает с центром вписанной окружности. Найдите углы треугольника.

4.8°. В прямой угол вписана окружность радиуса R, касающаяся сторон угла в точках A и B. Через некоторую точку на меньшей дуге AB окружности проведена касательная, отсекающая от данного угла треугольник. Найдите его периметр.

4.9. К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной, равной a, проведена касательная, пересекающая две его стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

4.10. Угол при вершине A треугольника ABC равен 120°. Окружность касается стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что расстояние от вершины A до центра окружности равно периметру треугольника ABC.

4.11. Прямая, параллельная хорде AB, касается окружности в точке C. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

4.12. Точка A лежит вне данной окружности с центром O. Окружность с диаметром OA пересекается с данной в точках B и C. Докажите, что прямые AB и AC — касательные к данной окружности.

4.13°. Через данную точку проведите касательную к данной окружности.

4.14. а) Две прямые, проходящие через точку M, лежащую вне окружности с центром O, касаются окружности в точках A и B. Отрезок OM делится окружностью пополам. В каком отношении отрезок OM делится прямой AB?

б) В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) вписана окружность с центром O, которая касается стороны AB в точке E. На продолжении стороны AC за точку A выбрана точка D так, что $AD = \frac{1}{2}AC$. Докажите, что прямые DE и AO параллельны.

4.15. Точка D — середина гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ACD, касается отрезка CD в его середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

4.16. Постройте хорду данной окружности, равную и параллельную заданному отрезку.

4.17. Окружность вписана в треугольник со сторонами, равными a, b и c. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

4.18. Окружность вписана в пятиугольник со сторонами, равными a, b, c, d и e. Найдите отрезки, на которые точка касания делит сторону, равную a.

4.19. Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанного круга.

4.20. Проведите к данной окружности касательную, от которой данная прямая отсекала бы данный отрезок, т. е., чтобы один конец отрезка лежал на прямой, а второй — на окружности.

4.21°. Докажите, что если окружность касается всех сторон четырёхугольника, то суммы противоположных сторон четырёхугольника равны между собой.

4.22. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M и продолжений двух других сторон. Докажите, что прямая AM делит периметр треугольника пополам.

4.23. В равнобедренный треугольник с основанием, равным a, вписана окружность и к ней проведены три касательные так, что они отсекают от данного треугольника три маленьких треугольника, сумма периметров которых равна b. Найдите боковую сторону данного треугольника.

4.24. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, M и N. Найдите угол KMN, если $\angle A = 70^\circ$.

4.25. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается сторон AB, BC и AC соответственно в точках K, L и M. Известно, что $\angle KLM = \alpha$. Найдите $\angle BOC$.

4.26°. Пусть r — радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами a и b и гипотенузой c. Докажите, что $r = \dfrac{a+b-c}{2}$.

4.27. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Проведены две окружности: первая — с центром A и радиусом AC, вторая — с центром B и радиусом BC. Они пересекают гипотенузу AB в точках P и Q. Докажите, что отрезок PQ равен диаметру вписанной окружности треугольника ABC.

4.28. CH — высота прямоугольного треугольника ABC, проведённая из вершины прямого угла. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в треугольники ACH, BCH и ABC, равна CH.

4.29°. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M. Пусть $AM = x$, $BC = a$, полупериметр треугольника равен p. Докажите, что $x = p - a$.

4.30. CD — медиана треугольника ABC. Окружности, вписанные в треугольники ACD и BCD, касаются отрезка CD в точках M и N. Найдите MN, если $AC - BC = 2$.

4.31. На основании AB равнобедренного треугольника ABC взята точка D, причём $BD - AD = 4$. Найдите расстояние между точками, в которых вписанные окружности треугольников ACD и BCD касаются отрезка CD.

4.32°. Окружность касается стороны BC треугольника ABC в точке M, а продолжения сторон AB и AC — в точках N и P соответственно. Вписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке K, а стороны AB — в точке L. Докажите, что: а) отрезок AN равен полупериметру треугольника ABC; б) $BK = CM$; в) $NL = BC$.

4.33. В треугольник со сторонами 6, 10 и 12 вписана окружность. К окружности проведена касательная так, что она пересекает две большие стороны. Найдите периметр отсечённого треугольника.

4.34. Через данную точку проведите прямую, отсекающую от данного угла треугольник заданного периметра.

4.35. Прямая, проходящая через центры двух окружностей называется их линией центров. Докажите, что общие внешние (внутренние) касательные к двум окружностям пересекаются на линии центров этих окружностей.

4.36°. Постройте общие касательные к двум данным окружностям.

4.37°. Говорят, что две окружности касаются, если они имеют единственную общую точку (точка касания окружностей). Докажите, что линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания.

4.38. Докажите, что две окружности касаются тогда и только тогда, когда они касаются некоторой прямой в одной и той же точке.

4.39. Две окружности касаются друг друга внешним (внутренним) образом. Докажите, что сумма (разность) их радиусов равна расстоянию между центрами. Верно ли обратное?

4.40. Окружность с центром O касается в точке A внутренним образом большей окружности. Из B точки большей окружности, диаметрально противоположной точке A, проведена хорда BC большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке M. Докажите, что $OM \parallel AC$.

4.41°. Окружности с центрами O_1 и O_2 касаются внешним образом в точке K. Некоторая прямая касается этих окружностей в различных точках A и B соответственно и пересекает их общую касательную, проходящую через точку K, в точке M. Докажите, что:

а) $\angle O_1MO_2 = \angle AKB = 90^\circ$;

б) прямые AK и BO_2 пересекаются на второй окружности.

4.42. В угол, равный 60°, вписаны две окружности, извне касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности равен r. Найдите радиус большей окружности.

4.43. Две окружности касаются внутренним образом. Известно, что два радиуса большей окружности, угол между которыми равен 60°, касаются меньшей окружности. Найдите отношение радиусов окружностей.

4.44°. Две окружности касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, пересекает эти окружности вторично в точках B и C соответственно. Докажите, что касательные, проведённые к этим окружностям в точках B и C, параллельны.

4.45. Постройте окружность, касающуюся: а) данной прямой и данной окружности в данной на ней точке; б) данной окружности и данной прямой в данной на ней точке.

4.46. Расстояние между центрами непересекающихся окружностей равно a. Докажите, что четыре точки пересечения общих внешних касательных с общими внутренними касательными лежат на одной окружности и найдите радиус этой окружности.

4.47. В четырёхугольнике $MNPQ$ расположены две непересекающиеся окружности так, что одна из них касается сторон MN, NP и PQ, а другая — сторон MN, MQ и PQ. Точки B и A лежат соответственно на сторонах MN и PQ, причём отрезок AB касается обеих окружностей. Найдите сторону MQ, если $NP = b$ и периметр четырёхугольника $BAQM$ больше периметра четырёхугольника $ABNP$ на величину $2p$.

4.48. В остроугольный треугольник вписана окружность радиуса R. К окружности проведены три касательные, разбивающие треугольник на три прямоугольных треугольника и шестиугольник. Периметр шестиугольника равен Q. Найдите сумму диаметров окружностей, вписанных в прямоугольные треугольники.

Дополнительные задачи

4.49. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке M. Докажите, что окружности, вписанные в треугольники ABM и ACM, касаются отрезка AM в одной точке.

4.50. На сторонах BC, CA, и AB треугольника ABC взяты соответственно точки A_1, B_1 и C_1, причём $AC_1 = AB_1$, $BA_1 = BC_1$ и $CA_1 = CB_1$. Докажите, что A_1, B_1 и C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.

4.51. Постройте окружности с центрами в трёх данных точках, попарно касающиеся друг друга внешним образом.

4.52. Даны три точки A, B и C. Постройте три окружности, попарно касающиеся в этих точках.

4.53. Три окружности попарно касаются друг друга внешним образом в точках A, B и C. Докажите, что касательные к этим окружностям в точках A, B и C пересекаются в одной точке.

4.54°. Суммы противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равны. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность, т. е. все его стороны касаются некоторой окружности (такой четырёхугольник называется *описанным*).

4.55. Докажите, что в выпуклый четырёхугольник $ABCD$ можно вписать окружность тогда и только тогда, когда окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC касаются диагонали AC в одной и той же точке.