Часть 1. Признаки равенства треугольников

Признаки равенства треугольников. Медиана, биссектриса, высота. Признаки и свойства равнобедренного треугольника. Серединный перпендикуляр к отрезку. Построения с помощью циркуля и линейки.

1.1. Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите AB, если $BC = 12$.

1.2. Биссектриса треугольника является его медианой. Докажите, что треугольник равнобедренный.

1.3. Равны ли треугольники: а) по двум сторонам и углу; б) по стороне и двум углам?

1.4. Докажите признаки равенства прямоугольных треугольников:

а) по двум катетам;

б) по катету и гипотенузе;

в) по катету и прилежащему острому углу;

г) по катету и противолежащему острому углу;

д) по гипотенузе и острому углу.

1.5. Постройте треугольник:

а) по двум сторонам и высоте, проведённым из одной вершины;

б) по стороне и высотам, проведённым к двум другим сторонам;

в) по углу, высоте и биссектрисе, проведённым из вершины этого угла;

г) по стороне, медиане, проведённой к этой стороне, и высоте, опущенной на другую сторону.

1.6. Докажите признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему углу.

1.7. Диагонали AC и BD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Периметр треугольника ABC равен периметру треугольника ABD, а периметр треугольника ACD — периметру треугольника BCD. Докажите, что $AO = BO$.

1.8. Докажите равенство треугольников:

а) по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины;

б) по медиане и двум углам, на которые разбивает эта медиана угол треугольника.

1.9. Точки M и N — середины равных сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку MN проходит через точку P.

1.10. Высоты треугольника ABC, проведённые из вершин B и C пересекаются в точке M. Известно, что $BM = CM$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

1.11. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.

1.12. Через данную точку проведите прямую, пересекающую две данные пересекающиеся прямые под равными углами.

1.13. Дана прямая l и точки A и B по разные стороны от неё. Постройте на прямой l такую точку C, чтобы прямая l делила угол ACB пополам.

1.14. Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё. Луч света, выпущенный из точки A, отразившись от этой прямой в точке C, попадает в точку B. Постройте точку C. (Угол падения равен углу отражения.)

1.15. Постройте биссектрису угла, вершина которого не помещается на чертеже.

1.16. Докажите, что две различные окружности не могут иметь более двух общих точек.

1.17. Постройте треугольник, если известны сторона, прилежащий к ней угол и сумма двух других сторон.

1.18. Постройте треугольник по двум сторонам и разности противолежащих им углов.

1.19. Постройте треугольник, если дана одна его вершина и две прямые, на которых лежат биссектрисы, проведённые из двух других вершин.

1.20. Из точки вне прямой опустите перпендикуляр на эту прямую с помощью циркуля и линейки, проведя не более трёх линий.

1.21. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведённой к третьей.

Дополнительные задачи

1.22. На сторонах AB, BC и CA остроугольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что если $\angle B_1A_1C = \angle BA_1C_1$, $\angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1$ и $\angle A_1C_1B = \angle AC_1B_1$, то точки A_1, B_1 и C_1 являются основаниями высот треугольника ABC.

1.23. Докажите, что, если в треугольнике один угол равен 120°, то треугольник, образованный основаниями его биссектрис, прямоугольный.