

Рациональное и не очень. Добавка

1. Существуют ли иррациональные числа a и b такие, что число a^b рациональное?
2. При разложении чисел A и B в бесконечные десятичные дроби длины минимальных периодов этих дробей равны 6 и 12 соответственно. Чему может быть равна длина минимального периода числа $A + B$?
3. Сумма и произведение двух чисто периодических десятичных дробей — чисто периодические дроби с периодом T . Докажите, что исходные дроби имеют периоды не больше T .
4. (а) Докажите, что $\cos n\varphi$ ($n \in \mathbb{N}$) представляется как многочлен от $\cos \varphi$, причем если $T_n(x)$ — тот самый многочлен, где $x = \cos \varphi$, то

$$T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x).$$

(б) Докажите, что $\cos 20^\circ$ иррационален.

(в) Докажите, что если $\cos\left(\frac{p}{q}\right)^\circ = \frac{m}{n}$, где $p, q, m, n \in \mathbb{Z}$, то n является степенью двойки (возможно, нулевой).

(г) Докажите, что на самом деле $\frac{m}{n}$ может равняться только одному из чисел $0, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$.

(д) Выведите отсюда, что при $n \neq 4$ не существует правильного n -угольника с вершинами в узлах целочисленной решётки.