

Графы-2. Лемма о рукопожатиях.

Определение. Количество ребер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Если вершина имеет нечетную степень, то она называется нечетной, если четную степень – то четной.

1. В стране 1568 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?
2. В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?
3. Известны степени всех вершин графа. Как по этим данным определить количество ребер в нем?
4. *Лемма о рукопожатиях.* Докажите, что в любом графе число нечетных вершин четно.
5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит три дороги, быть ровно 100 дорог?
7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
8. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей?
9. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
10. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.
11. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

Домашнее задание

12. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств?

Графы-2. Лемма о рукопожатиях.

Определение. Количество ребер, выходящих из вершины графа, называется степенью вершины. Если вершина имеет нечетную степень, то она называется нечетной, если четную степень – то четной.

1. В стране 1568 городов, из каждого выходит по 4 дороги. Сколько всего дорог в стране?
2. В королевстве 1001 город. Можно ли проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог?
3. Известны степени всех вершин графа. Как по этим данным определить количество ребер в нем?
4. *Лемма о рукопожатиях.* Докажите, что в любом графе число нечетных вершин четно.
5. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было четыре телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, восемь телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и три телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
6. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит три дороги, быть ровно 100 дорог?
7. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?
8. На клетчатом листе закрасили 25 клеток. Может ли каждая из них иметь нечётное число покрашенных соседей?
9. Могут ли степени вершин в графе быть равны:
а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2?
б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1?
в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?
10. В компании из семи мальчиков каждый имеет среди остальных не менее трёх братьев. Докажите, что все семеро – братья.
11. В городе проводилось совещание врачей. От каждой поликлиники на совещание было приглашено по пять врачей. Оказалось, что каждый из приглашенных работал в двух поликлиниках, поэтому на совещании представлял обе поликлиники. Кроме того, для любых двух поликлиник города среди участников совещания найдется врач, который в них работает. Сколько в городе поликлиник и сколько врачей принимало участие в совещании?

Домашнее задание

12. У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства одно, пять или девять соседних баронств?