Четверки точек на окружности

Очень часто нужно искать четверки точек, которые лежат на одной окружности

1. Две окружности пересекаются в точках K и L. Прямые k и l, проходящие через K и L соответственно, вторично пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую в точках – C и D. Докажите, что $AB||CD$.

2. В треугольнике ABC проведена средняя линия KN (K — середина AB, N — середина BC). На отрезках KB и BN отмечены точки L и M соответственно так, что $ALMC$ — вписанный. Докажите, что $KLMN$ — вписанный.

3. AH — высота остроугольного треугольника ABC, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

4. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1||AD$.

6. AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

7. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE||AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP||EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$.

[Школа №444]

[*2018–2019*] группа: 10–11 класс *22 сентября 2018 г.*

Четверки точек на окружности

Очень часто нужно искать четверки точек, которые лежат на одной окружности

1. Две окружности пересекаются в точках K и L. Прямые k и l, проходящие через K и L соответственно, вторично пересекают первую окружность в точках A и B, а вторую в точках – C и D. Докажите, что $AB||CD$.

2. В треугольнике ABC проведена средняя линия KN (K — середина AB, N — середина BC). На отрезках KB и BN отмечены точки L и M соответственно так, что $ALMC$ — вписанный. Докажите, что $KLMN$ — вписанный.

3. AH — высота остроугольного треугольника ABC, K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC. Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.

4. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD. На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD – точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD, пересекает прямую AB в точке C_1; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD, пересекает прямую CD в точке B_1. Докажите, что $B_1C_1||AD$.

6. AB — диаметр окружности ω. Прямая ℓ касается окружности ω в точке B. Точки C, D выбраны на ℓ таким образом, что B находится на отрезке CD. E, F — точки пересечения ω и прямых AC, AD соответственно, а G, H — точки пересечения ω и прямых CF, DE. Докажите, что $AH = AG$.

7. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка M так, что точка пересечения медиан треугольника ABM лежит на описанной окружности треугольника ACM, а точка пересечения медиан треугольника ACM лежит на описанной окружности треугольника ABM. Докажите, что медианы треугольников ABM и ACM из вершины M равны.

8. Окружность ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне BC — точка E так, что $DE||AC$. Точки P и Q на меньшей дуге AC окружности ω таковы, что $DP||EQ$. Лучи QA и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XBY + \angle PBQ = 180°$.