

Тригонометрическая запись комплексного числа

Определение. Каждое комплексное число можно однозначно представить в виде $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, причем r определяется единственным образом, а φ — с точностью до кратного 2π (если число не равно нулю). Число r называется *модулем* (и обозначается $|z|$), φ — *аргументом* комплексного числа, а сама форма называется *тригонометрической* записью комплексного числа.

Упр. Представьте в тригонометрической форме числа $2, 1 + i, 1 - \sqrt{3}i$.

1. (а) Докажите, что $|zt| = |z| \cdot |t|$ для любых $z, t \in \mathbb{C}$.
(б) Докажите, что если два натуральных числа представляются в виде суммы двух квадратов, то их произведение также представляется в виде суммы двух квадратов.
2. (а) Докажите, что при умножении (делении) комплексных чисел их модули умножаются (делятся) друг на друга, а аргументы складываются (вычитаются).
(б) (Формула Муавра) Докажите, что

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

3. Пользуясь формулой Муавра, выразите $\sin 7\varphi$ через $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$.
4. Вычислите
(а) $\sqrt{1+i}$; (б) $(1+\sqrt{3}i)^{2018}$; (с) $1 + (1+i) + (1+i)^2 + \dots + (1+i)^{146}$.
5. Комплексные корни уравнения $x^n - 1 = 0$ называются корнями n -ой степени из единицы.
(а) Представьте их в тригонометрической форме.
(б) Найдите сумму этих чисел.
(с) Найдите их произведение.
(д) Найдите их сумму квадратов.
6. (а) Найдите все вещественные корни уравнения

$$(x+i)^{2018} + (x-i)^{2018} = 0.$$

(б) Найдите все его комплексные корни.

7. Упростите выражение:

$$\cos \alpha + \cos 2\alpha + \dots + \cos n\alpha.$$