Комплексные числа

Определение. *Комплексным* числом называется формальная запись вида $a + bi$, где символ i удовлетворяет условию $i^2 = -1$, $a, b \in \mathbb{R}$. Действия над комплексными числами осуществляются так же, как и над вещественными, с учетом последнего условия. Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$. Числом 0 назовем выражение $0 + 0i$.

1. Пусть $x, y \in \mathbb{C}$. Докажите, что
(a) $x + y, x - y, xy \in \mathbb{C}$;
(b) если $y \neq 0$, то $\frac{x}{y} \in \mathbb{C}$.

2. Упростите выражение: $\frac{(1+3i)(1-4i)+4+i}{2+i}$.

3. Решите уравнение
(a) $x^2 - (2i + 2)x + (2i - 1) = 0$;
(b) $x^3 - 1 = 0$;
в комплексных числах.

Определение. Числа $a + bi$ и $a - bi$ называются *сопряженными*. Сопряженное к числу z обозначается $\overline{z}$.

Осознайте свойства сопряжения: $\overline{z} + \overline{t} = \overline{z + t}$; $\overline{zt} = \overline{z}\overline{t}$; $\overline{\overline{z}} = z$.

4. **(a)** Пусть x — корень квадратного трехчлена с рациональными коэффициентами. Докажите, что $\overline{x}$ также является корнем этого уравнения.
(b) Пусть $f(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Докажите, что если $f(x) = 0$, то $f(\overline{x}) = 0$.

Определение. Модуль комплексного числа $a + bi$ равен $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Осознайте, что: $z \cdot \overline{z} = |z|^2$.

5. **(Неравенство треугольника)** Докажите, что

$$|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|.$$

6. Про три комплексных числа известно, что $|z_1| = |z_2| = |z_3| \neq 0$ и $|z_1 + z_2 + z_3| = 0$. Докажите, что точки z_1, z_2, z_3 образуют равносторонний треугольник на комплексной плоскости.

7. Про комплексные числа x, y, z известно, что $|x| = |y| = |z| = 1$. Какие значения может принимать выражение $\left|\frac{x+y+z}{xy+yz+xz}\right|$?

Основная теорема алгебры. Любой многочлен (от одной переменной) ненулевой степени с комплексными коэффициентами имеет, по крайней мере, один комплексный корень.

Следствие из основной теоремы алгебры. Любой многочлен степени n с комплексными коэффициентами имеет в нём ровно n комплексных корней, с учётом их кратности.

8. Докажите, что для любого многочлена $P(x)$ с вещественными коэффициентами существует набор многочленов с вещественными коэффициентами $Q_i(x)$, $\deg Q_i(x) \leqslant 2$ такой, что $P(x) = Q_1(x)Q_2(x) \cdot \ldots \cdot Q_n(x)$.