

Вписанные углы. Задачи для самостоятельного решения.

1. В треугольнике ABC проведена средняя линия KN (K — середина AB , N — середина BC). На отрезках KB и BN отмечены точки L и M соответственно так, что $ALMC$ — вписанный. Докажите, что $KLMN$ — вписанный.
2. AH — высота остроугольного треугольника ABC , K и L — основания перпендикуляров, опущенных из точки H на стороны AB и AC . Докажите, что точки B, K, L и C лежат на одной окружности.
3. Равносторонние треугольники ABC и PQR расположены так, что вершина C лежит на стороне PQ , а вершина R — на стороне AB (точки A и P находятся в одной полуплоскости относительно CR). Докажите, что $AP \parallel BQ$.
4. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O . Описанные окружности треугольников AOB и COD пересекаются в точке M на стороне AD . Докажите, что треугольник BMC равнобедренный.
5. В треугольнике ABC $AB > BC$, и на стороне AB взята точка P так, что $BP = BC$. Биссектриса BM пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке N . Докажите, что точки A, P, M, N лежат на одной окружности.
6. Две окружности пересекаются в точках A и B . Через точку B проводится прямая, пересекающая вторично окружности в точках C и D , а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям. Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.
7. В окружности проведены две пересекающиеся хорды AB и CD . На отрезке AB взяли точку M так, что $AM = AC$, а на отрезке CD — точку N так, что $DN = DB$. Докажите, что если точки M и N не совпадают, то прямая MN параллельна прямой AD .
8. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. Перпендикуляр, опущенный из вершины C на биссектрису угла ABD , пересекает прямую AB в точке C_1 ; перпендикуляр, опущенный из вершины B на биссектрису угла ACD , пересекает прямую CD в точке B_1 . Докажите, что $B_1C_1 \parallel AD$.
9. Дан треугольник ABC .
 - (а) Докажите, что биссектриса угла B и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC .
 - (б) Докажите, что биссектриса угла, смежного с углом B , и серединный перпендикуляр к стороне AC пересекаются на окружности, описанной около треугольника ABC .

10. **Лемма о трезубце.** Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC .
- (а) **Теорема о трилистнике.** Прямая BI пересекает описанную окружность треугольника ABC второй раз в точке D . Докажите, что $DA = DC = DI$.
- (б) **Теорема Мансиона.** Пусть I_b — центр внеписанной окружности, касающейся стороны AC . Докажите, что $DI = DI_b$.
11. На «меньших» дугах AB и BC описанной окружности треугольника ABC отмечены середины — M и N . Пусть X — середина отрезка MN . Докажите, что $BX = XI$, где I — центр вписанной окружности треугольника ABC .
12. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle ABC + \angle ABD = 90^\circ$. На диагонали BD отмечена точка E , причём $BE = AD$. Из неё на сторону AB опущен перпендикуляр EF . Докажите, что $CD + EF < AC$.
13. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке K . Оказалось, что точки B, D , а также середины отрезков AC и KC лежат на одной окружности. Какие значения может принимать угол ADC ?

В листике суммарно 15 задач (включая пункты).
Количество полученных плюсовых по этим двум листикам конвертируются в
оценку по геометрии по следующему принципу.

3 — 9 плюсовых;

4 — 11 плюсовых;

5 — 13 плюсовых.

Последний день сдачи задач — 16 марта.