

# Турниры

– Мы с тобой подрались недавно.  
 – Я победил?  
 – Не, я легко тебя одолел.  
 – Быть того не может.  
 – Ну я же вратить не стану.

---

Разговор Брюса Бэннера и Тора

**Определение.** Турнир — это граф, в котором между любыми двумя вершинами есть ровно одно ориентированное ребро. Он называется турниром, поскольку моделирует однокруговой турнир, в котором нет ничьих.

1. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая команда сыграла с каждой один раз). Доказать, что можно выделить такие четыре команды  $A, B, C$  и  $D$ , что  $A$  выиграла у  $B, C$  и  $D$ ;  $B$  выиграла у  $C$  и  $D$ ,  $C$  выиграла у  $D$ .
2. 12 команд сыграли турнир по волейболу в один круг. Две команды одержали ровно по 7 побед. Доказать, что найдутся такие команды  $A, B, C$ , что  $A$  выиграла у  $B$ ,  $B$  выиграла у  $C$ , а  $C$  — у  $A$ .
3. В турнире в каждую вершину входит хотя бы одно ребро и из каждой хотя бы одно выходит. Докажите, что найдется цикл длины 3.
4. В турнире по волейболу  $n$  команд сыграли в один круг (каждая играла с каждой по одному разу, ничьих в волейболе не бывает). Пусть  $P$  — сумма квадратов чисел, задающих количество побед каждой команды,  $Q$  — сумма квадратов чисел, задающих количество их поражений. Докажите, что  $P = Q$ .

**Определение.** Гамильтонов путь — это путь (ориентированный), который проходит через каждую вершину ровно один раз. По аналогии с путём определяется Гамильтонов цикл.

**Определение.** Граф называется сильно связным, если из любой вершины можно попасть в любую перемещаясь только по стрелкам.

5. (а) Докажите, что в любом турнире существует Гамильтонов путь. (Надо рассмотреть путь максимальной длины и предположить, что он не проходит по всем вершинам.)  
 (б) Докажите, что в любом сильно связном турнире есть Гамильтонов цикл.
6. Докажите, что в сильно связном турнире с  $n > 4$  вершинами существует хотя бы (а) 1; (б) 2 вершины такие, что при удалении одной из них сильная связность графа не теряется.