Дискретная непрерывность.

0. В ряд выписаны целые числа, причём каждые два соседних отличаются ровно на 1. Самое левое число равно -10, а самое правое равно 10. Докажите, что в этом ряду есть число 0.

1. Первый тайм футбольного матча закончился со счётом 0:1, а матч – со счётом 4:3. Докажите, что в некоторый момент счёт на табло был ничейным.

2. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

3. В ряд лежат 200 шаров, из них 100 черных и 100 красных, причем первый и последний шары – черные. Докажите, что можно убрать справа несколько шаров подряд так, чтобы красных и черных шаров осталось поровну.

4. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «Нале-во!» некоторые из них повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

5. За круглым столом сидят рыцари и лжецы, причём и тех, и других - чётное количество. Всегда ли можно разделить стол на две части так, что в каждой части будет ровно половина всех рыцарей и ровно половина всех лжецов?

6. В пяти вазочках лежат конфеты. Если во всех вазочках лежит разное количество конфет, то Андрей добавляет четыре конфеты в вазочку, в которой меньше всего конфет. Докажите, что рано или поздно количество конфет в каких-то двух вазочках сравняется.

7. В некоторых клетках таблицы 50×50 расставлены числа $+1$ и -1 таким образом, что модуль суммы всех чисел не превосходит 100. Докажите, что в некотором квадрате 25×25 модуль суммы не превосходит 25.

8. В магазине в ряд висят 21 белая и 21 фиолетовая рубашка. Найдите такое минимальное k, что при любом изначальном порядке рубашек можно снять k белых и k фиолетовых рубашек так, чтобы оставшиеся белые рубашки висели подряд и оставшиеся фиолетовые рубашки тоже висели подряд.

9.* На острове живут рыцари, лжецы и подпевалы; каждый знает про всех, кто из них кто. В ряд построили всех 2018 жителей острова и попросили каждого ответить «Да» или «Нет» на вопрос: «На острове рыцарей больше, чем лжецов?». Жители отвечали по очереди и так, что их слышали остальные. Рыцари отвечали правду, лжецы лгали. Каждый подпевала отвечал так же, как большинство ответивших до него, а если ответов «Да» и «Нет» было поровну, давал любой из этих ответов. Оказалось, что ответов «Да» было ровно 1009. Какое наибольшее число подпевал могло быть среди жителей острова?