Разнобой

1. В этом учебном году прошли три математических олимпиады: Математический праздник, Устная олимпиада в 444 школе и Московская олимпиада школьников. В каждой из них поучаствовало нечетное число учеников кружка, причем каждый участник участвовал в нечетном числе олимпиад. Всего на кружке 20 учеников. Докажите, что кто-то из них не был ни на одной олимпиаде.

2. **(a)** Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 чёрных шашек на чёрных полях шахматной доски?
(b) Сколькими способами можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в каждой половине было по два туза?

3. Докажите, что при всех натуральных n

(a) $7^n - 1 \vdots 6$; **(b)** $2^{4n} - 1 \vdots 15$; **(c)** $13^n + 3^{n+2} \vdots 10$.

4. На доске было записано число 1. За один шаг число, имеющееся на доске, либо умножали на произвольное однозначное число, либо прибавляли к нему произвольное однозначное число, и результат записывали вместо него. Через некоторое время на доске оказалось записано стозначное число. Верно ли, что в какой-то момент на доске было записано тридцатизначное число?

5. Какое наименьшее число клеточек на доске 8×8 можно закрасить в черный цвет так, чтобы была хотя бы одна закрашенная клетка
(a) в любом квадратике 2×2; **(b)** в любом уголке из трёх клеточек?

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что сторона DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

7. **(a)** Найти наибольший общий делитель чисел $\underbrace{222\ldots2}_{448}$ и $\underbrace{2\ldots2}_{42}$;

(b) При каких натуральных n сократима дробь $\frac{7n+17}{2n+5}$?