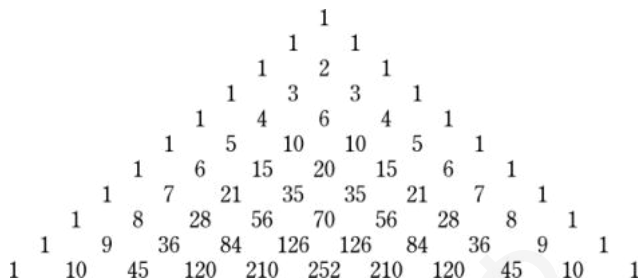


Треугольник Паскаля

В треугольнике Паскаля по краям в каждой строке стоят единицы, а каждое внутреннее число равно сумме двух чисел, стоящих над ним.



1. (а) Докажите, что если в задаче про робота в каждой клетке таблицы написать количество путей до неё, получится треугольник Паскаля.
(б) Докажите, что в треугольнике Паскаля записаны биномиальные коэффициенты.
2. (а) Докажите, что сумма чисел в каждой строке треугольника Паскаля в два раза больше, чем сумма чисел в предыдущей строке.
(б) Докажите, что $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
3. (а) Докажите, что в любой строчке треугольника Паскаля сумма чисел, стоящих на четных местах, равна сумме чисел, стоящих на нечетных местах.
(б) Докажите, что $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots \pm C_n^n = 0$.
4. У Тома Сойера есть забор из $2n$ досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?
5. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме чисел предыдущей правой диагонали (по линии, параллельной правой стороне треугольника), начиная с самого левого вплоть до стоящего справа над числом a .
6. Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля, уменьшенное на 1, равно сумме всех чисел, заполняющих параллелограмм, ограниченный левой и правой диагоналями, на пересечении которых стоит число (сами диагонали в параллелограмм не включаются).
7. Докажите, что:
(а) $(n - k) \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^k$;
(б) $C_n^1 + 6 \cdot C_n^2 + 6 \cdot C_n^3 = n^3$;
(в) $C_n^1 + 14 \cdot C_n^2 + 36 \cdot C_n^3 + 24 \cdot C_n^4 = n^4$;
(г) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^k \cdot C_n^k = (-1)^k \cdot C_{n-1}^k$;
(е) $C_n^0 \cdot 2^0 + C_n^1 \cdot 2^1 + \dots + C_n^n \cdot 2^n = 3^n$.