

Алгоритм Евклида

- Хромой кузнецик прыгает по прямой, причем вправо он может прыгать только на 15 см, а влево только на 21 см. (а) Сможет ли он оказаться на 3 см левее начальной позиции? Если да, то как ему прыгать? (б) А если на 2 см правее? (с) В каких точках прямой он вообще может оказаться, прыгая по правилам?
- От прямоугольника 1365×165 начали отрезать квадраты, причем сторона квадрата каждый раз равна меньшей стороне прямоугольника, и после отрезания каждый раз остается снова прямоугольник. В конце концов остался квадрат. Чему равна его сторона?

Будем использовать следующие обозначения: $\text{НОД}(a, b) = (a, b)$, $\text{НОК}(a, b) = [a, b]$.

- Пусть есть натуральные числа $a \geq b$ и $(a, b) = r$.
 - Докажите, что если большее из чисел заменить на их разность, то НОД не поменяется, то есть $(a - b, b) = (a, b) = r$.
 - Докажите, что $(a - b \cdot k, b) = (a, b) = r$, где k – целое.
 - Докажите, что если $a \mid b$, то $(a, b) = b$.

Алгоритм Евклида: для того, чтобы найти НОД двух чисел $a \geq b$, необходимо выполнить последовательно несколько делений с остатком:

$$a = b \cdot q_1 + r_1$$

$$b = r_1 \cdot q_2 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot q_3 + r_3$$

$$r_2 = r_3 \cdot q_4 + r_4$$

...

$$r_{n-2} = r_{n-1} \cdot q_{n-1} + r_n$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot q_n + 0$$

На каждом шаге большее число заменяется на остаток от деления на меньшее. Так продолжается, пока очередной остаток не окажется нулевым ($r_{n+1} = 0$).

- Пользуясь результатами задачи №3, докажите, что в алгоритме $r_n = (a, b)$.
- Найдите алгоритмом Евклида (а) (1365, 165); (б) (12751, 10537).
- Докажите, что r_1, r_2, \dots, r_n можно представить в виде $a \cdot m + b \cdot k$, где m и k – целые.
- Найдите какие-нибудь целые x и y для которых: $998x + 546y = 2$.
- Докажите, что если a и b взаимно просты, то уравнение $ax + by = 1$ имеет решение в целых числах.