Треугольник Паскаля

Задача. Черепашка Пося находится в нижнем левом углу таблицы $(n+1)\times(m+1)$. За один ход Пося может переползти на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Сколько существует способов добраться до верхнего правого угла таблицы?

1. **(a)** Пронумеруем строки от 1 до $(n+1)$, столбцы от 1 до $(m+1)$. Пусть черепашка начинает движение из клетки $(1,1)$. Докажите, что количество способов добраться до клетки (x,y) равно количеству способов добраться до клетки $(x-1,y)$ плюс количество способов добраться до клетки $(x,y-1)$.
(b) Решите задачу про черепашку для $n=m=5$.

2. **(a)** Мы выдрессировали черепашку. Теперь мы ей говорим, когда ползти вверх, а когда ползти вправо. Чтобы запомнить как именно черепашка ползёт, мы записываем очередность наших команд. Сколько вариантов записей могло получиться, если черепашка в итоге оказалась в клетке $(n+1,2)$?
(b) Решите задачу про черепашку Посю.

3. Посмотрите, куда черепашка может доползти за n шагов и докажите тождество:

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n.$$

4. Пока мальчик Вова командует черепашкой, мальчик Петя начал раскрывать скобки выражения:

$$(a+b)^n=(a+b)(a+b)\cdots(a+b).$$

Но получилось так, что когда Петя умножал слагаемое на a, то Вова говорил черепашке ползти вверх, а если Петя умножал слагаемое на b, то Вова говорил черепашке ползти вправо. В конце концов Петя привел подобные слагаемые. Выразите получившиеся коэффициенты.

Запишем в каждую клетку таблицы число, равное количеству способов добраться до этой клетки. Повернем нашу таблицу так, чтобы все числа, отвечающие за одинаковое количество ходов, были на одном уровне. Результат называется **треугольником Паскаля**.

На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух, стоящих над ним. k-е число n-й строки треугольника Паскаля равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Коэффициенты разложения из 4 задачи называются **бином Ньютона.**

5. Вычислите выражение $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\cdots\pm C_n^n$
(a) используя треугольник Паскаля;
(b) используя бином Ньютона.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

6. У Тома Сойера есть забор из $2n$ досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?

7. Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$?

8. **(a)** Для каждой из первых 4 строчек треугольника Паскаля сложите квадраты стоящих в ней чисел и найдите полученное число в треугольнике Паскаля. Запишите полученное тождество.
(b) Докажите это тождество.

Числа Фибоначчи — последовательность чисел:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89, \dots,$$

удовлетворяющая условию $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

9. Используя треугольник Паскаля докажите тождество:

$$F_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \cdots .$$