

Треугольник Паскаля

Задача. Черепашка Пося находится в нижнем левом углу таблицы $(n+1) \times (m+1)$. За один ход Пося может переползти на одну клетку вверх или на одну клетку вправо. Сколько существует способов добраться до верхнего правого угла таблицы?

- (а) Пронумеруем строки от 1 до $(n+1)$, столбцы от 1 до $(m+1)$. Пусть черепашка начинает движение из клетки $(1, 1)$. Докажите, что количество способов добраться до клетки (x, y) равно количеству способов добраться до клетки $(x-1, y)$ плюс количество способов добраться до клетки $(x, y-1)$.

(б) Решите задачу про черепашку для $n = m = 5$.
- (а) Мы выдрессировали черепашку. Теперь мы ей говорим, когда ползти вверх, а когда ползти вправо. Чтобы запомнить как именно черепашка ползёт, мы записываем очередность наших команд. Сколько вариантов записей могло получиться, если черепашка в итоге оказалась в клетке $(n+1, 2)$?

(б) Решите задачу про черепашку Посю.
- Посмотрите, куда черепашка может доползти за n шагов и докажите тождество:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

- Пока мальчик Вова командует черепашкой, мальчик Петя начал раскрывать скобки выражения:

$$(a+b)^n = (a+b)(a+b) \dots (a+b).$$

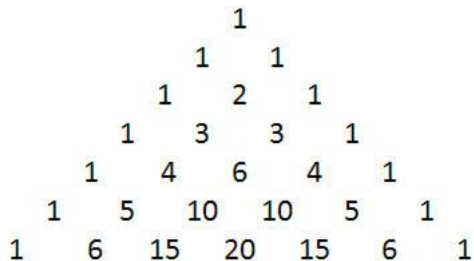
Но получилось так, что когда Петя умножал слагаемое на a , то Вова говорил черепашке ползти вверх, а если Петя умножал слагаемое на b , то Вова говорил черепашке ползти вправо. В конце концов Петя привел подобные слагаемые. Выразите получившиеся коэффициенты.

Запишем в каждую клетку таблицы число, равное количеству способов добраться до этой клетки. Повернем нашу таблицу так, чтобы все числа, отвечающие за одинаковое количество ходов, были на одном уровне. Результат называется **треугольником Паскаля**.

На краях этого треугольника стоят единицы, а каждое число внутри является суммой двух, стоящих над ним. k -е число n -й строки треугольника Паскаля равно C_n^k (строки нумеруются сверху вниз, начиная с нуля, а числа в строках нумеруются слева направо, также начиная с нуля).

Коэффициенты разложения из 4 задачи называются **бином Ньютона**.

- Вычислите выражение $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots \pm C_n^n$
 - используя треугольник Паскаля;
 - используя бином Ньютона.



6. У Тома Сойера есть забор из $2n$ досок и белая краска. Сколькими способами он может покрасить в этом заборе четное число досок?
7. Чему равно $C_k^k + C_{k+1}^k + \dots + C_n^k$?
8. (а) Для каждой из первых 4 строчек треугольника Паскаля сложите квадраты стоящих в ней чисел и найдите полученное число в треугольнике Паскаля. Запишите полученное тождество.
(б) Докажите это тождество.

Числа Фибоначчи — последовательность чисел:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots,$$

удовлетворяющая условию $F_0 = 1, F_1 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

9. Используя треугольник Паскаля докажите тождество:

$$F_n = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots$$