Малая теорема Ферма.

Малая теорема Ферма Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Малая теорема Ферма Если p — простое число и a — целое число, то $a^p \equiv a\ (mod\ p)$.

1. а) Какой остаток дает 3^{103} при делении на 101?
   б) Какой остаток дает 2^{1010} при делении на 73?
   в) Какой остаток дает 8^{900} при делении на 29?
   г) Докажите, что если a взаимнопросто с p, и $b = k(p-1) + r$, то $a^b \equiv a^r\ (mod\ p)$.
   д) Какой остаток дает $42^{42^{42}}$ при делении на 2017?
   е) Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
2. Докажите, что $1^{100} + 2^{100} + \ldots + 100^{100} + 1$ делится на 101.
3. Натуральные числа a, b, c, d, e таковы, что
   а) $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится на 13^5 .
   б) Известно, что n^2 при делении на простое p дает остаток 1, какой остаток при делении на p может давать n?
   в) $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится на 13.
4. а) Будет ли простым число $1568^{2016} + 4033$?
   б) Будет ли простым число $30^{239} + 239^{30}$?
5. а) Докажите, что ни при каком n число $n^2 + 1$ не делится на 103.
   б)Докажите, что ни при каком целом n число $n^2 + n + 1$ не делится на 101.
   в)Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.
6. Пусть p-простое число. Докажите, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p)$ для любых целых a, b.
7. Пусть p, q- различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q\ (mod\ pq)$.
8. а)Пусть $p > 5$- простое число. Докажите, что $11\ldots1$ (в числе $p-1$ единица) делится на p.
   б) Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

   Домашняя работа
9. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
10. Докажите, что для простого числа p число $2^{p^2} - 2$ делится на p.

Малая теорема Ферма.

Малая теорема Ферма Если p — простое число и a — целое число, не делящееся на p, то $a^{p-1} \equiv 1\ (mod\ p)$.

Малая теорема Ферма Если p — простое число и a — целое число, то $a^p \equiv a\ (mod\ p)$.

1. а) Какой остаток дает 3^{103} при делении на 101?
   б) Какой остаток дает 2^{1010} при делении на 73?
   в) Какой остаток дает 8^{900} при делении на 29?
   г) Докажите, что если a взаимнопросто с p, и $b = k(p-1) + r$, то $a^b \equiv a^r\ (mod\ p)$.
   д) Какой остаток дает $42^{42^{42}}$ при делении на 2017?
   е) Докажите, что $300^{3000} - 1$ делится на 1001.
2. Докажите, что $1^{100} + 2^{100} + \ldots + 100^{100} + 1$ делится на 101.
3. Натуральные числа a, b, c, d, e таковы, что
   а) $a^{12} + b^{12} + c^{12} + d^{12} + e^{12}$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится на 13^5 .
   б) Известно, что n^2 при делении на простое p дает остаток 1, какой остаток при делении на p может давать n?
   в) $a^6 + b^6 + c^6 + d^6 + e^6$ делится на 13. Докажите, что $abcde$ делится на 13.
4. а) Будет ли простым число $1568^{2016} + 4033$?
   б) Будет ли простым число $30^{239} + 239^{30}$?
5. а) Докажите, что ни при каком n число $n^2 + 1$ не делится на 103.
   б)Докажите, что ни при каком целом n число $n^2 + n + 1$ не делится на 101.
   в)Число $a^2 + ab + b^2$ делится на простое вида $p = 3k + 2$. Докажите, что a и b делятся на p.
6. Пусть p-простое число. Докажите, что $(a + b)^p \equiv a^p + b^p\ (mod\ p)$ для любых целых a, b.
7. Пусть p, q- различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q\ (mod\ pq)$.
8. а)Пусть $p > 5$- простое число. Докажите, что $11\ldots1$ (в числе $p-1$ единица) делится на p.
   б) Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

   Домашняя работа
9. Докажите, что $7^{120} - 1$ делится на 143.
10. Докажите, что для простого числа p число $2^{p^2} - 2$ делится на p.