

Окружности. Счет дуг.

Определение. На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C . Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга окружности ω . Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180°); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC .

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большой» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
 - a) AM — биссектриса угла BAC ;
 - b) AN — биссектриса внешнего угла BAC .
2. Невероятно полезная задача.
 - a) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD .
 - b) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC .
3. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
 - а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC , то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
 - б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC , то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.
5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P , что $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$, $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$. Лучи AP, BP, CP продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.
6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC . Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ .
7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и Q , ω_2 — в точках B и D . Известно, что N лежит вне ω . Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.
8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи BC и AD — в точке Q . Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M ; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N . Докажите, что $KLMN$ — ромб.

Домашнее задание

1. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла(Треугольник ABC не меняется при движении $BC = a, CA = b, AB = c$). Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.

Окружности. Счет дуг.

Определение. На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C . Пусть BC — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга окружности ω . Мерой дуги BC назовём величину центрального угла BOC (может быть больше 180°); угол BAC называется вписанным углом, опирающимся на дугу BC .

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большой» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что
 - a) AM — биссектриса угла BAC ;
 - b) AN — биссектриса внешнего угла BAC .
2. Невероятно полезная задача.
 - a) Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S . Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD .
 - b) В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P . Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC .
3. а) Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB , не содержащей точек C и D . Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB , DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.
б) На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D . Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.
4. На окружности взяты точки A, C_1, B, A_1, C, B_1 в указанном порядке.
 - а) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются биссектрисами углов треугольника ABC , то они являются высотами треугольника $A_1B_1C_1$.
 - б) Докажите, что если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 являются высотами треугольника ABC , то они являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.
5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P , что $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$, $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$. Лучи AP, BP, CP продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC . Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.
6. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC . Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q . Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ .
7. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N . Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и Q , ω_2 — в точках B и D . Известно, что N лежит вне ω . Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.
8. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P , лучи BC и AD — в точке Q . Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M ; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N . Докажите, что $KLMN$ — ромб.

Домашнее задание

1. Прямоугольный треугольник ABC с прямым углом A движется так, что его вершины B и C скользят по сторонам данного прямого угла(Треугольник ABC не меняется при движении $BC = a, CA = b, AB = c$). Докажите, что множеством точек A является отрезок и найдите его длину.