

Окружности-4. Угол между хордой и касательной.

1. Из конца A диаметра AC окружности опущен перпендикуляр AP на касательную, проведённую через лежащую на окружности точку B , отличную от A и C . Докажите, что AB – биссектриса угла PAC .
2. Касательная к описанной окружности неравнобокого треугольника ABC , восстановленная в вершине A , пересекает прямую BC в точке S ; точка L – основание биссектрисы AL треугольника. Докажите, что $SA = SL$.
3. Окружность ω_2 проходит через центр O окружности ω_1 и пересекает ее в точках A и B . Через точку A проведена касательная к окружности ω_2 . Точка D – вторая точка пересечения этой касательной с окружностью ω_1 . Докажите, что $AD = AB$.
4. Через точку касания двух окружностей проведена секущая. Доказать, что касательные, проведенные к окружностям через концы образовавшихся хорд, параллельны.
5. В треугольник вписана окружность, касающаяся сторон AB и AC в точках D и E . Доказать, что центр окружности, вписанной в треугольник ADE принадлежит первой окружности.
6. Биссектрисы углов B и C остроугольного неравобедренного треугольника ABC пересекаются в точке I и пересекают высоту из вершины A в точках P и Q . Докажите, что прямая AI касается описанной окружности треугольника IPQ .
7. **Лемма Архимеда.** Окружность ω касается хорды MN окружности ω в точке B , а окружности ω в точке A . Докажите, что AB является биссектрисой угла MAN .
8. Дан прямоугольный треугольник ABC , $\angle BAC = 90^\circ$. На «меньших» дугах AB и AC его описанной окружности отмечены точки C_0 и B_0 соответственно. Отрезок BB_0 пересекает сторону AC в точке B_1 ; отрезок CC_0 пересекает сторону AB в точке C_1 . Докажите, что описанные окружности треугольников AB_1B_0 и AC_1C_0 касаются.
9. Дан равнобедренный треугольник ABC , $AB = AC$; O, I – центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность ω описана вокруг треугольника BIO и пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке D . Докажите, что AD – касательная к ω .

Домашнее задание

1. Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке K . Докажите, что касательная в точке K к окружности, описанной около треугольника ABK , параллельна CD .
2. К окружности с диаметром AC проведена касательная BC . Отрезок AB пересекает окружность в точке D . Через точку D проведена еще одна касательная к окружности, пересекающая отрезок BC в точке K . В каком отношении точка K разделила отрезок BC ?