Ортоцентр-3. Разное.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC, его ортоцентр обозначен через H, центр описанной окружности ω— через O, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно.

1. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Доказать, что прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.
2. Высоты BB_1 и AA_1 продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точка B_2 и A_2 соответственно. а)Докажите, что $A_2B_2 \perp CO$.
   б)Оказалось, что $A_2B_2 = 10$. Найдите сторону ортотреугольника A_1B_1.
3. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.
4. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне ВС, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.
5. Пусть O_A, O_B, O_C – центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.
6. Прямая, перпендикулярная стороне BC и проходящая через точку C_1 , пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что угол CKB – прямой.
7. В треугольнике HBA_1 провели высоту A_1A_2 и высоту B_1B_2 в треугольнике HAB_1 . Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.
8. BH и A_1C_1 пересекаются в точке X, луч BO пересекает AC в точке Y. Докажите, что $XY || HB_0$.
9. Из основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC опустили перпендикуляры стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1. Докажите, что четыре основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.
10. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R – радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$, то $AH + BH \geq 2R$.
11. Из H опущены перпендикулярны на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Покажите, что PQ проходит через B_0.

Ортоцентр-3. Разное.

В этом листочке, если не оговорено иное, дан остроугольный треугольник ABC, его ортоцентр обозначен через H, центр описанной окружности ω— через O, проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1 , а середины сторон AB, BC и CA — точки C_0, A_0 и B_0 соответственно.

1. Точки X и Y — середины отрезков AB и CH соответственно. Доказать, что прямые XY и A_1B_1 перпендикулярны.
2. Высоты BB_1 и AA_1 продолжили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC в точка B_2 и A_2 соответственно. а)Докажите, что $A_2B_2 \perp CO$.
   б)Оказалось, что $A_2B_2 = 10$. Найдите сторону ортотреугольника A_1B_1.
3. Докажите, что $HA \cdot HA_1 = HB \cdot HB_1 = HC \cdot HC_1$.
4. Отрезок AD — диаметр описанной окружности остроугольного треугольника ABC. Через точку пересечения высот этого треугольника провели прямую, параллельную стороне ВС, которая пересекает стороны AB и AC в точках E и F соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEF в два раза больше стороны BC.
5. Пусть O_A, O_B, O_C – центры описанных окружностей треугольников AB_1C_1 , A_1BC_1 , A_1B_1C соответственно. Докажите, что треугольник $O_AO_BO_C$ равен серединному треугольнику.
6. Прямая, перпендикулярная стороне BC и проходящая через точку C_1 , пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что угол CKB – прямой.
7. В треугольнике HBA_1 провели высоту A_1A_2 и высоту B_1B_2 в треугольнике HAB_1 . Докажите, что отрезок A_2B_2 параллелен стороне AB.
8. BH и A_1C_1 пересекаются в точке X, луч BO пересекает AC в точке Y. Докажите, что $XY || HB_0$.
9. Из основания A_1 высоты AA_1 остроугольного треугольника ABC опустили перпендикуляры стороны AB, AC и на высоты BB_1, CC_1. Докажите, что четыре основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.
10. В треугольнике ABC высоты или их продолжения пересекаются в точке H, а R – радиус описанной около него окружности. Докажите, что если $\angle A \leq \angle B \leq \angle C$, то $AH + BH \geq 2R$.
11. Из H опущены перпендикулярны на внутреннюю и внешнюю биссектрисы угла B. Пусть P и Q — основания этих перпендикуляров. Покажите, что PQ проходит через B_0.